বাণিজ্যিক গণিত

।। এস. এম. মাহফুজুর রহমান

বাণিজ্যিক গণিত

ডক্টর এস. এম. মাহ্‌ফুজুর রহমান
সহযোগী অধ্যাপক, ফিনান্স বিভাগ
ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়

বাংলা একাডেমী ॥ ঢাকা

বাএ ২৬৮৪

প্রথম প্রকাশ : মাঘ ১৩৯৪/ফেব্রুয়ারি ১৯৮৮। প্রকাশক : পরিচালক, পাঠ্যপুস্তক বিভাগ। প্রথম পুনর্মুদ্রণ : পৌষ ১৩৯৯/জানুয়ারি ১৯৯৩। প্রকাশক : মুহম্মদ নূরুল হুদা, উপপরিচালক, বিপণন ও বিক্রয়োন্নয়ন উপবিভাগ [পুনর্মুদ্রণ প্রকল্প], বাংলা একাডেমী, ঢাকা – ১০০০। কম্পিউটার কম্পোজ : পুনর্মুদ্রণ প্রকল্প, বাংলা একাডেমী। মুদ্রণ : যমুনা প্রিন্টিং অ্যান্ড পাবলিশিং কোং, ৮–৩ নীলক্ষেত, বাবুপুরা, ঢাকা–১২০৫। প্রচ্ছদ : সমর মজুমদার। প্রকাশনার সার্বিক তত্ত্বাবধান : চৌধুরী আবদুর রহমান। মুদ্রণ সংখ্যা : ২২৫০। মূল্য : ১২০.০০ টাকা

BANIJJIK GONIT (Business Mathematics) by Dr. S. M. Mahfuzur Rahman., Published by Bangla Academy, Dhaka, Bangladesh. First reprinted in 1993. Price : Tk. 120.00.

ISBN 984-07-2693-5

পুনর্মুদ্রণ প্রসঙ্গে

বাংলা একাডেমী প্রকাশিত বইয়ের পুনর্মুদ্রণের কাজটি ইতিপূর্বে বিভিন্ন বিভাগ থেকে করা হতো। এর কোন প্রয়োজন বা চাহিদাভিত্তিক প্রাতিষ্ঠানিক কাঠামো ছিল না।

বিপণন ও বিক্রয়োন্নয়ন উপবিভাগ সরাসরি বইপত্র বিপণনের সাথে সংশ্লিষ্ট থাকার কারণে একাডেমী প্রকাশিত কোন্ বই বেশী পাঠকনন্দিত, কোন্ বই ছাত্রসমাজের কাছে বিশেষভাবে আদৃত সে সম্পর্কে সমধিক ওয়াকিফহাল থাকায়, পুনর্মুদ্রণ কর্মটি বিওবি উপবিভাগের দায়িত্বে সম্পাদিত হলে কাজের সমন্বয় সাধন, প্রকাশনার দ্রুত ব্যবস্থাগ্রহণ, ক্রেতা সাধারণের চাহিদা মোতাবেক দ্রুত বাজারজাতকরণের পদক্ষেপ গ্রহণ ইত্যাকার বিষয় ত্বরান্বিত হবে বিবেচনা করে কার্যনির্বাহী পরিষদ বিওবি'র আওতায় 'পুনর্মুদ্রণ প্রকল্প' নামে একটি 'কোষ' গঠন করে।

নবগঠিত পুনর্মুদ্রণ প্রকল্প বিগত অর্থ বছরের ছাত্রছাত্রীদের পাঠ্যভুক্ত গ্রন্থ ব্যতীতও পাঠকনন্দিত উল্লেখযোগ্য সংখ্যক সাহিত্য ও সংস্কৃতি সম্পর্কিত গ্রন্থ পুনর্মুদ্রণের উদ্যোগ গ্রহণ করেছে। তারই ফলশ্রুতি এই গ্রন্থ। যাঁদের জন্য গ্রন্থটি প্রকাশিত হলো তাঁদের উপকারে আসলে বাংলা একাডেমী শ্রম সার্থক হবে বলে মনে করবে।

মোহাম্মদ হারুন-উর-রশিদ
মহাপরিচালক
বাংলা একাডেমী

ভূমিকা

হিসাববিজ্ঞান, ফিন্যান্স, ব্যবস্থাপনা এবং বিপণন তথা বাণিজ্য শাস্ত্রের সকল শাখার জন্য অর্থনীতি, পরিসংখ্যান এবং গণিতের জ্ঞান অপরিহার্য বলেই বাণিজ্যশাস্ত্রে স্নাতক এবং স্নাতকোত্তর পর্যায়ের আবশ্যিক পাঠক্রমে তাদের অন্তর্ভুক্তি স্বাভাবিক। আই. সি. এম. এ. বা আই. সি. এ-র পাঠক্রমেও এসব বিষয় অন্তর্ভুক্ত। সাধারণভাবে ও উচ্চশিক্ষার প্রায় সকল ক্ষেত্রে এখন গণিতের ব্যবহার ব্যাপকতর হয়ে উঠছে, বিশেষ করে, বিভিন্ন সমস্যার কাঠামোগত ও পরিমাণগত বিশ্লেষণ এবং প্রায় সর্বক্ষেত্রে কম্পিউটারের প্রয়োগের কারণে।

দুঃখের বিষয় বিদ্যালয় এবং উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ের শিক্ষার্থীদের গণিতাতংক প্রবল ও ব্যাপক। তদুপরি উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে গণিতশাস্ত্র ছাড়াই বাণিজ্য বিভাগে অধ্যয়ন করতে পারার প্রচলিত ব্যবস্থাটি বাণিজ্যের ছাত্রছাত্রীদের পরবর্তীতে গণিত থেকে দূরে রাখার পথ আরও প্রশস্ত করেছে। স্নাতক পর্যায়ে এসে গণিতশাস্ত্র আয়ত্তের প্রশ্নটি সে কারণেই তাদের জন্য অনেকটা আপদ হিসেবে দেখা দেয়। পূর্ববর্তী পর্যায়ে উচ্চতর গণিতের মৌলিক বিষয়সমূহ আয়ত্ত না করে আসার ফলে স্নাতক সম্মানে ও প্রিলিমিনারি শ্রেণীর ছাত্রছাত্রীদের জন্য বাণিজ্যিক গণিত অধ্যয়ন বেশ দুরূহ হয়ে পড়ে, বিঘ্নিত হয় বাণিজ্যশাস্ত্রের অনেক প্রায়োগিক বিষয় অনুধাবন।

উচ্চতর পর্যায়ে অধ্যয়নরত বাণিজ্যের ছাত্রছাত্রীদের জন্য বাংলায় গণিতের পাঠ্যবই নেই বললেই চলে। যে দু-একটি বই ইতিমধ্যে বেরিয়েছে সেগুলির কাঠামো এমন যে প্রাথমিক পর্যায়ে জ্ঞানের অভাবে সেগুলি পড়ে অবশ্য আয়ত্ত করতে হবে এমন বিষয় বেছে নেয়া বাণিজ্যের শিক্ষার্থীদের পক্ষে বেশ কঠিন। এই পরিপ্রেক্ষিতে মূলত তিনটি উদ্দেশ্য সামনে রেখে বর্তমান গ্রন্থটি রচনার কাজে হাত দেয়া হয় ঃ

ক. ছাত্রছাত্রীদের অহেতুক গণিতাতংক দূর করা,

খ. স্নাতক ও স্নাতকোত্তর পর্যায়ের বাণিজ্যের ছাত্রছাত্রীদের পূর্ববর্তী পর্যায়ে গণিতের জ্ঞান না থাকলেও যাতে বাণিজ্যিক গণিত আয়ত্তে আনতে সুবিধা হয় এমন একটি সহজবোধ্য বাংলা বই প্রণয়ন, এবং

গ. তাতে অবশ্য আয়ত্ত করা প্রয়োজন মূলত এমন বিষয়সমূহ উপস্থাপন।

বর্তমান গ্রন্থটিতে বলতে গেলে তাত্ত্বিক আলোচনা একেবারেই অনুপস্থিত। তবে যাদের উদ্দেশ্যে গ্রন্থটি রচিত উচ্চতর গণিতে তাদের প্রয়োজনীয় পশ্চাৎপাঠ নেই বিবেচনায় অনেক মৌলিক বিষয় অপেক্ষাকৃত বিস্তৃতভাবে উপস্থাপনের চেষ্টা করা হয়েছে। একদিকে

উচ্চতর গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ দেখানো অপরদিকে গণিতের মৌলিক বিষয়সমূহের ব্যাখ্যাদান এ দুটো কাজ একত্রে সমাধা করা অবশ্যই অত্যন্ত জটিল। এটি করতে গিয়েই অনেকক্ষেত্রে মৌলিক ধারণাসমূহের সংক্ষিপ্ত ব্যাখ্যা এবং সংশ্লিষ্ট সূত্রাবলী উল্লেখ করে প্রয়োগিক দিকসমূহ নিয়ে অপেক্ষাকৃত বেশি আলোচনা করা হয়েছে। বলা বাহুল্য উদাহরণের উপরই বেশি প্রাধান্য দেয়া হয়েছে যাতে কিনা শিক্ষার্থীরা প্রয়োগিক গণিতের উপর ইংরেজি ভাষায় রচিত বিদেশী যেসব বই এখন বহুল ব্যবহৃত বর্তমান গ্রন্থটি রচনায় সেগুলি থেকেই সাহায্য নেয়া হয়েছে।

গ্রন্থটি বাংলায় লেখা হলেও সংকেত এবং সংখ্যাসমূহকে ইংরেজিতেই রাখতে হয়েছে। উদাহরণ, অনুশীলনী এবং পৃষ্ঠার নম্বর দেয়া হয়েছে বাংলায়। পরিশব্দসমূহের ক্ষেত্রে শুধু প্রথমবার উল্লেখের সময় তাদের পাশে বন্ধনীতে ইংরেজি পরিভাষা আছে, পরবর্তীতে সেগুলি শুধু বাংলাতেই উল্লিখিত হয়েছে। বিষয়বস্তুর দিক থেকে ত্রিকোণমিতি সংবলিত আলোচনা ও উদাহরণ সীমিতসংখ্যক অপরিহার্য ক্ষেত্র ব্যতীত কোথাও উপস্থাপিত হয়নি।

গ্রন্থটি রচনায় সহকর্মী এবং শুভানুধ্যায়ীদের উৎসাহ ছিল প্রচুর। গ্রন্থকার তাদের সকলের প্রতি কৃতজ্ঞ। বাণিজ্য অনুষদের ডীন, ফিন্যান্স বিভাগের অধ্যাপক ডঃ এ. এইচ. এম. হাবিবুর রহমান, ব্যবস্থাপনা বিভাগের চেয়ারম্যান ডঃ খন্দকার বজলুল হক এবং আমার সহকর্মী সহযোগী অধ্যাপক ডঃ এম. খায়রুল হোসাইন উৎসাহ ও প্রয়োজনীয় পরামর্শ জুটিয়ে আমাকে বিশেষ কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করেছেন। তবে উৎসাহ ও অনুপ্রেরণার প্রধান উৎস আমার স্ত্রী। গ্রন্থটির রচনাপর্ব সুষ্ঠুভাবে সম্পাদনে সাহায্য না করলে এটির রচনাকাল আরও দীর্ঘায়িত হতে পারত।

উল্লেখ্য যে গ্রন্থটি রচনা ও প্রকাশের উদ্যোগ প্রাথমিকভাবে বাংলা একাডেমীর পক্ষ থেকে আসে। পরবর্তীতে তার পাণ্ডুলিপি প্রণয়ন এবং চূড়ান্তকরণে সার্বক্ষণিক সহযোগিতার জন্য একাডেমী কর্তৃপক্ষকে জানাই আন্তরিক ধন্যবাদ।

গ্রন্থটি শিক্ষার্থীদের উপকারে আসবে। উদ্দেশ্য বিচারে এটি পাঠকমহলে সমাদৃত হলে পরিশ্রম সার্থক হয়েছে বলে মনে করব।

গ্রন্থটির সীমাবদ্ধতা এবং ত্রুটি–বিচ্যুতির সকল দায়–দায়িত্ব গ্রন্থকারের। পাঠক ও বিশেষজ্ঞমহলের সুপ্রযুক্ত মন্তব্য এবং পরামর্শ ভবিষ্যৎ সংস্করণসমূহে সেগুলিকে দূরীকরণে একান্ত উপযোগী হবে। চেষ্টার ত্রুটি না থাকা সত্ত্বেও বেশ কিছু অনিচ্ছাকৃত মুদ্রণ বিভ্রাট থেকে যাওয়ায় গ্রন্থকার আন্তরিকভাবে দুঃখিত।

ফিন্যান্স বিভাগ
ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়

এস. এম. মাহফুজুর রহমান

দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা

বাণিজ্যিক গণিতের প্রথম সংস্করণটি দ্রুত শেষ হওয়ায় তা নতুন করে ছাপানোর প্রয়োজনীয়তা অনুভব করছিলাম প্রায় বছর দুই থেকে। বাংলা একাডেমী নিজ থেকে একটি পুনর্মুদ্রণের উদ্যোগ নিলে কৃতজ্ঞতার সঙ্গে স্বাগত জানাই। ইতোমধ্যে সহকর্মীবৃন্দ, বিশেষ করে যারা শিক্ষকতায় বইটি ব্যবহার করেন, বইটির উৎকর্ষ সাধনে বেশ কিছু পরামর্শ দিয়েছিলেন। বইটিতে অসাবধানতা ও মুদ্রণপ্রমাদজনিত অনেক ত্রুটি রয়ে গিয়েছিল এবং সতর্ক ছাত্রছাত্রীরা সেগুলি দেখিয়ে দিয়েও আমার উপকার করেছে। বর্তমান সংস্করণটি এসবের ভিত্তিতে সংশোধিত ও পরিমার্জিত। নতুন আঙ্গিকে বইটি প্রকাশনায় সযত্ন পরিশ্রম দেয়ার জন্যে বাংলা একাডেমী কর্তৃপক্ষ এবং পুনর্মুদ্রণ প্রকল্পের কর্মকর্তা ও কারিগরি কর্মীবৃন্দকে জানাই আন্তরিক ধন্যবাদ।

ডিসেম্বর ১৯৯২

এস. এম. মাহফুজুর রহমান

UGC.কেয়ার
সূত্র
আবা-৪

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

সংখ্যা ব্যবস্থা

[NUMBER SYSTEM]

বিভিন্ন প্রকার সংখ্যা, এদের বৈশিষ্ট্য এবং পারস্পরিক সম্পর্কের কাঠামো নিয়েই সংখ্যা ব্যবস্থা তৈরি। সংখ্যা ব্যবস্থার সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হচ্ছে বিভিন্ন প্রকার সংখ্যার প্রকৃতি এবং বৈশিষ্ট্য। এ অধ্যায়ে সংক্ষেপে এ প্রসঙ্গেই আলোচনা হবে। গণিতের মৌলিক বিষয় গণনার জন্য সাধারণত ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা (Positive whole number) ব্যবহার করা হয়। এদেরকে সাধারণভাবে স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number) বলে। এ জাতীয় সংখ্যা দিয়েই আলোচনা শুরু করা হল।

স্বাভাবিক সংখ্যা

$1, 2, 3, 4 \ldots$ ইত্যাদি সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাই স্বাভাবিক সংখ্যা। পক্ষান্তরে $0, -4, -123, \frac{2}{7}, 51.23$ ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যা নয়। স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ :

১. স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সমাহারকে N হিসাবে চিহ্নিত করলে প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যাই তার একটি উপাদান ; অর্থাৎ n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং N স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সমাহার হলে $n \in N$

২. প্রতিটি স্বাভাবিক সংখা n–এর জন্য একটি পরবর্তী স্বাভাবিক সংখা $n + 1$ আছে এবং n ও $n + 1$ উভয়েই N এর উপাদান ; অর্থাৎ $n \in N \rightarrow (n + 1) \in N$

৩. যদি দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা m এবং n উভয়েই N–এর উপাদান হয় এবং $m + 1 = n + 1$ হয় তবে $m = n$;

৪. প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা n–এর জন্য $n + 1 \neq 1$; এই বৈশিষ্ট্য ০ কে স্বাভাবিক সংখ্যা হিসাবে বিবেচনার ধারণা নাকচ করে

৫. কতিপয় স্বাভাবিক সংখ্যার সমাহার S যদি স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সাধারণ সমাহার N–এর একটি অংশ হয় এবং কোন স্বাভাবিক সংখ্যা n–এর জন্য 1 এবং $n + 1$

উভয়েই S–এর উপাদান হয় তবে $S = N$; বিপরীতভাবে, কোন সমাহার N এর উপসমাহার S তখনই N এর সমান হবে যখন $1 \in S$ এবং $n \in S \rightarrow (n + 1) \in S$

উপর্যুক্ত বৈশিষ্ট্যসমূহ ইতালীয় গণিতবিদ পিয়ানো কর্তৃক উদ্ভাবিত বলে তাদের স্বাভাবিক সংখ্যার বৈশিষ্ট্যসংক্রান্ত পিয়ানো স্বতঃসিদ্ধ বলা হয়।

স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের যোজন (addition), বিয়োজন (subtraction), পূরণ (multiplication) এবং বিভাজনের (division) ক্ষেত্রে নিম্নের বৈশিষ্ট্যসমূহ বিশেষ প্রণিধানযোগ্য ঃ

১. দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা m এবং n–এর যোজন এবং পূরণের ফলে প্রাপ্ত সংখ্যাসমূহও স্বাভাবিক। পক্ষান্তরে তাদের বিয়োজন বা বিভাজনের ফলে প্রাপ্ত সংখ্যাসমূহ স্বাভাবিক নাও হতে পারে।

যেমন $3 - 5 = - 2$ স্বাভাবিক সংখ্যা নয়। একইভাবে $5 \div 4 = \frac{5}{4}$ স্বাভাবিক সংখ্যা নয়।

২. m এবং n দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা হলে

$m + n = n + m$; $m.n = n.m \rightarrow m.1 = 1.m = m$;

৩. m, n এবং p তিনটি স্বাভাবিক সংখ্যা হলে

$m + (n + p) = (m + n) + p = m + n + p$

$m. (n.p) = (m.n).p = m.n.p$

$m. (n + p) = m.n + m.p$;

$m + p = n + p \rightarrow m = n$; $m.p = n.p \rightarrow m = n$ যখন $p \neq 0$;

$m. (n + p) = m.n + m.p$;

$(n + p)m = n.m + p.m$;

৪. স্বাভাবিক সংখ্যার একটি অপরটির চেয়ে বড় কিংবা ছোট হতে পারে। এ ধরনের সম্পর্ককে সংখ্যার তুলনামূলক বিন্যাস (order relations) বলে। এবং প্রকাশের ক্ষেত্রে

ক. m n –এর চেয়ে বড় হলে লেখা হয় $m > n$

খ. m n–এর চেয়ে ছোট হলে লেখা হয় $m < n$

৫. দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা m এবং n এর ক্ষেত্রে

$m > n$ হলে $m = n + p$ যেখানে p অপর একটি স্বাভাবিক সংখ্যা

আবার,

$m < n$ হলে $m + p = n$

এছাড়া,

যদি $m > n$ এবং $n > p$ হয় তবে $m > p$;

যদি $m > n$ এবং $n > m$ হয় তবে $m = n$;

যদি $m > n$ হয় তবে $m + p > n + p$ এবং

যদি $m > n$ হয় তবে $mp > np$

অনেক সময় দুটি অনির্দিষ্ট স্বাভাবিক সংখ্যা m এবং n–এর বেলায় $m \geq n$ এবং $m < n$ বিবৃতির প্রয়োগ করা হয়। $m > n$ এর অর্থ হয় $m > n$ অথবা $m = n$ এবং একইভাবে, $m \leq n$ এর অর্থ হয় $m < n$ অথবা $m = n$

অখণ্ড বা পূর্ণ সংখ্যা (Integers)

শূন্যসহ ধনাত্মক (Positive) এবং ঋণাত্মক (Negative) সকল অখণ্ড সংখ্যাই এই শ্রেণীর আওতাভুক্ত। অর্থাৎ — α থেকে 0 এবং 0 থেকে + α পর্যন্ত সকল পূর্ণসংখ্যার কথাই এখানে বলা হচ্ছে। উদাহরণ হিসাবে 105, – 4, 0, –11, 15 ইত্যাদি দেখিয়ে বলা যায় যে এদের মধ্যে 105 এবং 15 ধনাত্মকপূর্ণ সংখ্যা এবং — 4 এবং — 11 ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। 0 একটি বিশেষ পূর্ণসংখ্যা কেন না তার ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোন চিহ্ন নেই।

পূর্ণ সংখ্যাসমূহের যোজন এবং পূরণের ক্ষেত্রে স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের যোজন এবং পূরণের সকল নিয়ম প্রযোজ্য। তবে এসবের একটি ব্যতিক্রম রয়েছে

আবার,

$m < n$ হলে $m + p = n$

এছাড়া,

যদি $m > n$ এবং $n > p$ হয় তবে $m > p$;

যদি $m > n$ এবং $n > m$ হয় তবে $m = n$;

যদি $m > n$ হয় তবে $m + p > n + p$ এবং

যদি $m > n$ হয় তবে $mp > np$

অনেক সময় দুটি অনির্দিষ্ট স্বাভাবিক সংখ্যা m এবং n–এর বেলায় $m \geq n$ এবং $m \leq n$ বিবৃতির প্রয়োগ করা হয়। $m \geq n$ এর অর্থ হয় $m > n$ অথবা $m = n$ এবং একইভাবে, $m \leq n$ এর অর্থ হয় $m < n$ অথবা $m = n$

অখণ্ড বা পূর্ণ সংখ্যা (Integers)

শূন্যসহ ধনাত্মক (Positive) এবং ঋণাত্মক (Negative) সকল অখণ্ড সংখ্যাই এই শ্রেণীর আওতাভুক্ত। অর্থাৎ $-\alpha$ থেকে 0 এবং 0 থেকে $+\alpha$ পর্যন্ত সকল পূর্ণসংখ্যার কথাই এখানে বলা হচ্ছে। উদাহরণ হিসাবে 105, -4, 0, -11, 15 ইত্যাদি দেখিয়ে বলা হয় যে এদের মধ্যে 105 এবং 15 ধনাত্মকপূর্ণ সংখ্যা এবং -4 এবং -11 ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। 0 একটি বিশেষ পূর্ণসংখ্যা কেন না তার ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোন চিহ্ন নেই।

পূর্ণ সংখ্যাসমূহের যোজন এবং পূরণের ক্ষেত্রে স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের যোজন এবং পূরণের সকল নিয়ম প্রযোজ্য। তবে এসবের একটি ব্যতিক্রম হচ্ছে

$m.p = n.p$ হলে সকল ক্ষেত্রে $m = n$ হবার জন্য $p \neq 0$ হতে হবে। আরও যোগ করা যায় যে

সকল অখণ্ড সংখ্যা n–এর জন্য $n + 0 = 0 + n = n$ এবং

$n + (-n) = (-n) + n = 0$

অখণ্ড সংখ্যাসমূহের মধ্যে এক ধরনের বিশেষ অখণ্ড সংখ্যা আছে যেগুলি শুধুমাত্র একই সংখ্যা অথবা 1 ব্যতীত অন্যকোন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নয়। যেমন 13, 3, -5, 17 ইত্যাদি। এ ধরনের সংখ্যাকে মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা (Prime) বলে। মৌলিক অখণ্ড সংখ্যাকে একই সংখ্যা এবং 1–এর গুণফল হিসাবে দেখানো যায়। যেমন $13 = 13 \times 1$, $-15 = -15 \times 1$ ইত্যাদি। আবার যদি কোন মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা p দ্বারা কতিপয় অখণ্ড সংখ্যা a, b, c . . . . ইত্যাদিকে ভাগ করা যায় তবে p এসব অখণ্ড সংখ্যার অন্তত একটি উৎপাদক হবেই। উদাহরণ স্বরূপ, 132 কে মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা 11 দ্বারা ভাগ

করা যায় এবং $132 = 2 \times 3 \times 3 \times 11$ কিংবা $132 = 2 \times 66$, $132 = 3 \times 44$, $132 = 4 \times 33$ ইত্যাদির প্রতি ক্ষেত্রে 11 একটি উৎপাদক।

মূলদ সংখ্যা (Rational number)

m একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং n শূন্য ব্যতীত কোন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে যেকোন পূর্ণ বা খণ্ড সংখ্যা p কে $p = \frac{m}{n}$ হিসাবে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$$5 = \frac{15}{3} \text{ কিংবা } \frac{10}{2} \text{ কিংবা } \frac{25}{5} \text{ ইত্যাদি ; } -\frac{3}{7} = \frac{-9}{21} ;$$
$$-1 = \frac{-56}{56} ; 0 = \frac{0}{70}$$

এভাবে কোন সংখ্যা pকে যদি $\frac{m}{n}$ রূপে প্রকাশ করা যায় যেখানে m এবং n উভয়েই পূর্ণ সংখ্যা এবং $n > 0$ তবে pকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়। মূলদ সংখ্যাসমূহের যোজন, বিয়োজন, পূরণ এবং বিভাজন প্রক্রিয়া দেখানোর জন্য দুটি মূলদ সংখ্যা $p = \frac{a}{b}$ এবং $q = \frac{c}{d}$ নেয়া যাক। এদের জন্য

ক. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

খ. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

গ. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

ঘ. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ $\quad [\because \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}]$

এছাড়া, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ এবং $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (উভয় ক্ষেত্রে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $b \neq 0$)

মূলদ সংখ্যাসমূহের বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ ঃ

১. দুটি মূলদ সংখ্যা p এবং q–এর যোগফল একটি এবং মাত্র একটিই মূলদ সংখ্যা হবে ;

২. দুটি মূলদ সংখ্যা p এবং q–এর যোজনের ক্ষেত্রে $p + q = q + p$;

৩. তিনটি মূলদ সংখ্যা p, q এবং r এর জন্য $(p + q) + r = p + (q + r) = p + q + r$;

৪. কোনো মূলদ সংখ্যা p –এর জন্য একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা — p আছে এবং $p + (-p) = (-p) + p = 0$;

৫. প্রতিটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা p–এর জন্য একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা — p আছে এবং $p + (-p) = (-p) + p = 0$;

৬. তিনটি মূলদ সংখ্যা p, q এবং r–এর মধ্যে যদি সম্পর্ক এমন হয় যে $p + r = q + r$ তবে $p = q$; আবার $p.r = q.r$ হলে $p = q$ যখন $r \neq 0$

৭. দুটি মূলদ সংখ্যার পূরণের ফলে একটি এবং মাত্র একটিই মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায় ;

৮. যেকোন সংখ্যা p, q এবং r এর পূরণের ক্ষেত্রে $p.q = q.p$ এবং $(p.q).r = p.(q.r)$;

৯. যেকোন মূলদ সংখ্যা p–এর জন্য $p.1 = 1.p = p$

১০. মূলদ সংখ্যা p, q এবং r –এর জন্য $p\,(q + r) = pq + pr$

১১. মূলদ সংখ্যা $p \neq 0$ হলে অপর একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{1}{p}$ আছে এবং $p \times \frac{1}{p} = 1$

১২. দুটি মূলদ সংখ্যা p এবং q এর গুণফল 0 হলে $p = 0$ অথবা $q = 0$ অথবা p এবং q উভয়েই 0

১৩. দুটি মূলদ সংখ্যা $p = \frac{a}{b}$ এবং $q = \frac{c}{d}$ হলে ইতিপূর্বে বলা হয়েছে যে $p - q = \frac{ad - bc}{bd}$ এবং যেহেতু $b \neq 0, d \neq 0 \rightarrow bd \neq 0$,

ক. $p - q = 0$ অর্থাৎ $p = q$ হবে শুধুমাত্র তখনই যখন $ad - bc = 0$

খ. $p > q$ হবে তখনই যখন $ad - bc > 0$ এবং

গ. $p < q$ হবে তখনই যখন $ad - bc < 0$

১৪. p, q এবং r তিনটি মূলদ সংখ্যার জন্য যদি

ক. $p > q$ এবং $q > r$ হয় তবে $p > r$

খ. $p > q$ হয় তবে $p + r > q + r$

গ. $p < q$ হয় তবে $p + r < q + r$

মূলদ ভগ্নাংশ $\frac{p}{q}$ কে দশমিকে প্রকাশ করা যায় এবং সে ক্ষেত্রে দশমিকে প্রকাশিত সংখ্যাটি সমাপ্ত বা অসমাপ্ত উভয় প্রকারই হতে পারে। যেমন

$$\frac{2}{5} = 0.4 ; \frac{35}{16} = 2.1875 ; \frac{1}{6} = 0.16666\ldots = 0.1\dot{6} ;$$

$$\frac{3}{11} = 0.272727\ldots = 0.\dot{2}\dot{7} ;$$

$$\frac{29}{4} = 4.142057142057142057\ldots = 4.\dot{1}4205\dot{7}$$ ইত্যাদি।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational number)

অমূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা সংখ্যার সাহায্যে নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায় ঃ যদি কোন মূলদ সংখ্যা p এর জন্য এমন কোন মূলদ সংখ্যা q না থাকে যাতে $(q)^n = p$ হয় তবে $q = \sqrt[n]{p}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। x একটি মূলদ সংখ্যা হলে x^2, x^3, x^7 ইত্যাদির সব কটিই মূলদ সংখ্যা কিন্তু $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[7]{x}$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যা নাও হতে পারে। যেমন $\sqrt{2}$ কে $\frac{m}{n}$ রূপে প্রকাশ প্রকাশ করা যায় না, যেখানে m এবং n উভয়ই পূর্ণসংখ্যা এবং সে কারণে $\sqrt{2}$ কে অমূলদ সংখ্যা বলে। অমূলদ সংখ্যার আরও কয়েকটি উদাহরণ $\sqrt{7}, \sqrt{10}, 3 + \sqrt{11}$ ইত্যাদি।

বাস্তব সংখ্যা (Real number)

মূলদ এবং অমূলদ সকল সংখ্যাকে একত্রে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। — 1, 5, 0, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{5}$ ইত্যাদির প্রত্যেকেই একেকটি বাস্তব সংখ্যা। বাস্তব সংখ্যাসমূহের বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ ঃ

১. p এবং q দুটি বাস্তব সংখ্যা হলে তাদের যোগফল $(p + q)$ এবং গুণফল $(p.q)$ উভয়েই বাস্তব সংখ্যা ;

২. p এবং q দুটি বাস্তব সংখ্যা হলে

$p + q = q + p$ এবং $p.q = q.p$

৩. p, q এবং r তিনটি বাস্তব সংখ্যা হলে

$(p + q) + r = p + (q + r)$ এবং $(p.q).r = p.(q.r)$

$p(q + r) = p.q + p.r$ এবং $(q + r).p = q.p + r.p$

৪. একটি বাস্তব সংখ্যা 0 আছে যাতে কিনা যেকোনো সংখ্যা p এর জন্য $p + 0 = p = 0 + p$ এবং একটি বাস্তব সংখ্যা 1 আছে যাতে কিনা যেকোনো বাস্তব সংখ্যা p এর জন্য $p.1 = p = 1.p$

৫. প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা p এর জন্য অপর একটি বাস্তব সংখ্যা — p আছে যাতে $p + (-p) = 0$ হয় এবং একটি বাস্তব সংখ্যা $\frac{1}{p}$ আছে যাতে $p.\frac{1}{p} = 1$ হয়।

বাস্তব সংখ্যার তুলনামূলক বিন্যাসের ক্ষেত্রে

ক. p এবং q দুটি বাস্তব সংখ্যার সম্পর্ক $p = q$, $p > q$ এবং $p < q$ এদের যেকোন একটি হতে পারে

খ. তিনটি বাস্তব সংখ্যা p, q এবং r এর সম্পর্ক $p > q$ এবং $q > r$ হলে $p > r$

গ. $p > q$ হলে $p + r > q + r$

এবং $p.r > q.r$

বিমূর্ত মান (Modulus)

কোনো বাস্তব সংখ্যা p এর বিমূর্ত মান বলতে তার চিহ্ন (যোজন ও বিয়োজন) বর্জিত সংখ্যাগত মানকে বুঝায় এবং তা $|p|$ হিসাবে লেখা হয়। p এর মান 0 হলে $|p| = 0$ এবং এভাবে

$$|p| = \begin{cases} p & \text{যখন } p \text{ ধনাত্মক} \\ -p & \text{যখন } p \text{ ঋণাত্মক} \\ 0 & \text{যখন } p = 0 \end{cases}$$

বিমূর্ত মান সম্পর্কে জানা প্রয়োজন যে

ক. কোন বাস্তব সংখ্যার বিমূর্ত মান কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না অর্থাৎ $|p| > 0$

খ. প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা p এর জন্য

$p \leq |p|$ এবং $-p \leq |p|$

গ. $|p| = |-p|$

ঘ. $|p|$ p এবং $-p$ এর মধ্যে বৃহত্তরটির সমান অর্থাৎ $|p| = \max\{p, -p\}$

কাল্পনিক সংখ্যা (Imaginary number)

কোনো বাস্তব সংখ্যাকে বর্গ করলে তার মান ধনাত্মক হয় এবং ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল (Square root) ধনাত্মকও হতে পারে, ঋণাত্মকও হতে পারে। যেমন $\sqrt{4} = \pm 2$। কিন্তু ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে না কেন না এমন কোনো বাস্তব সংখ্যা নেই যার বর্গমান ঋণাত্মক। এখন যদি $\sqrt{-4}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হয় তবে একটি সহায়ক সংখ্যা $\sqrt{-1}$ এর সাহায্য নিতে হয়। প্রক্রিয়াটি হচ্ছে $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2\sqrt{-1}$। $\sqrt{-1}$ কে কাল্পনিক সংখ্যা i দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে $\sqrt{-4} = \pm 2i$। সাধারণভাবে সকল ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলকে কাল্পনিক সংখ্যা বলে। কাল্পনিক সংখ্যার জন্য $\sqrt{-1} = i$ ই সর্বাধিক গুরুত্বপূর্ণ ধারণা এবং

$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -1i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i^2.i^2.i = (-1).(-1).i = i$ ইত্যাদি।

জটিল সংখ্যা (Complex number)

x এবং y দুটি বাস্তব সংখ্যা হলে $x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা যার একটি অংশ বাস্তব এবং অপর অংশ কাল্পনিক।

$x + iy$ এবং $x - iy$ আকারে প্রকাশিত দুটি জটিল সংখ্যার জুটিকে অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা (conjugate complex number) বলে। জটিল সংখ্যাসমূহের বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ ঃ

ক. দুটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার যোগফল এবং গুণফল উভয়েই প্রকৃত সংখ্যা, যেমন

$$\begin{aligned}(x + iy)(x - iy) &= x^2 - (iy)^2 \\ &= x^2 - i^2 y^2 \\ &= x^2 - (-1)y^2 \\ &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

$(x + iy) + (x - iy) = 2x$

খ. $x + iy = m + in$ হলে $x = m$ এবং $y = n$

গ. $(x + iy) \pm (m + in) = (x \pm m) + i(y \pm n)$

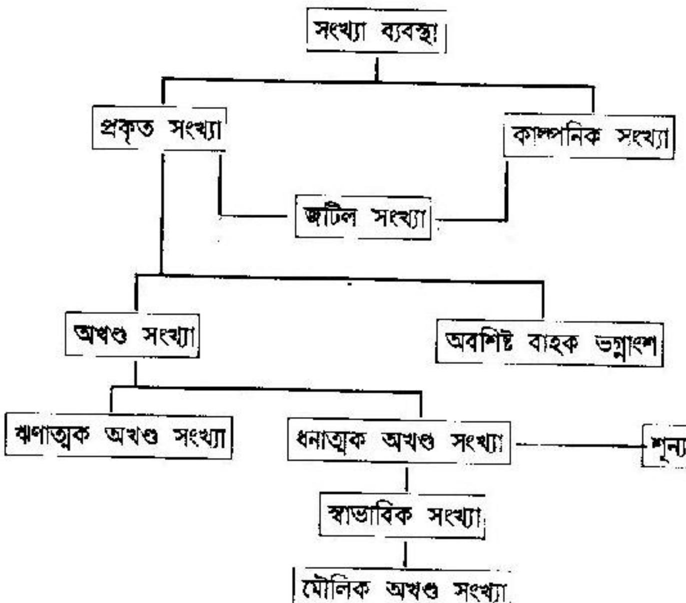
$(x + iy)(m + in) = (xm - yn) + i(xn + ym)$

$$\frac{x + iy}{m + in} = \frac{x + iy}{m + in} \times \frac{m - in}{m - in}$$

$$= \frac{xm + yn}{m^2 + n^2} + i\frac{ym - xn}{m^2 + n^2}$$

এছাড়া, $x + iy = 0$ হলে $x = 0$ এবং $y = 0$ এবং কোন জটিল সংখ্যা $x + iy$ এর $x = 0$ হলে $0 + iy$ একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা এবং $y = 0$ হলে $x + iy$ পরিণত হয় একটি বিশুদ্ধ বাস্তব সংখ্যায়।

বিভিন্ন প্রকার সংখ্যা সম্পর্কে উপরের বিবরণ দেয়ার পর সংখ্যার শ্রেণীকরণ নিচের ছকের মাধ্যমে উপস্থাপন করা যায় ঃ



অনুশীলনী — ১

১. নীচের বাক্যগুলির সত্যতা যাচাই কর ঃ

ক. যদি $x^2 > 4$ হয় তবে $x > 2$

খ. বাস্তব সংখ্যামাত্রই মূলদ সংখ্যা

গ. বাস্তব সংখ্যা মূলদও হতে পারে, অমূলদও হতে পারে

ঘ. এমন বাস্তব সংখ্যা আছে যা একই সঙ্গে মূলদ এবং অমূলদ

ঙ. অমূলদ সংখ্যামাত্রই কাল্পনিক সংখ্যা

২. সঠিক উত্তরের নিচে দাগ দাও ঃ

ক. দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল একটি অমূলদ/মূলদ/মূলদ কিংবা অমূলদ সংখ্যা ;

খ. দুটি মূলদ সংখ্যার গুণফল একটি অমূলদ/মূলদ সংখ্যা ;

গ. যদি $x^2 < y^2$ হয় এবং $x, y < 0$ হয় তবে $x < y/x > y$;

ঘ. যদি $0 < x < 1$ হয় তবে $x^2 > x/x^2 < x$;

ঙ. দুটি সংখ্যার একটি বাস্তব অপরটি কাল্পনিক হলে তাদের গুণফল বাস্তব/কাল্পনিক সংখ্যা হবে।

৩. নিচের বাক্যগুলি সত্য কি না যুক্তিসহ দেখাও ঃ

ক. যদি $m > n$ হয় এবং $p > 0$ হয় তবে $mp > np$;

খ. যদি $a \leq b$ হয় এবং $a \geq b$ হয় তবে $a = b$;

গ. যদি $a < b$ হয় তবে $a < \frac{a+b}{2} < b$;

ঘ. যদি $a > 0$ এবং $b > 0$ হয় তবে $a^2 > b^2$;

ঙ. যদি $p = q$ হয় তবে $p = q + r$ যেখানে r যেকোনো সম্ভাব্য সংখ্যা।

৪. x এবং y এর মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $3 + 2i - 4 - 6i = x + iy$;

খ. $2 + 3i^3 - i^2 + 7i + 1 = x + iy$;

গ. $(2-3i)(3+i) - (2+i)(i-3) = x + iy$;

ঘ. $\frac{4+i}{i-2} = x + iy$ সংকেত ঃ $\frac{4+i}{i-2} = \frac{(4+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)}$

ঙ. $\frac{9-7i}{2-3i} = x + iy$

দ্বিতীয় অধ্যায়

সূচক ও করণী

(INDICES AND SURDS)

সূচক (Index)

n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে কোন বাস্তব সংখ্যা a-এর জন্য $a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots n$ বার এবং সেক্ষেত্রে n কে ভিত্তি a–এর সূচক বলা হয়। ভিত্তি 2–এর সূচক 4 হলে

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

সূচক n ঋণাত্মক হতে পারে। তবে সে ক্ষেত্রে ভিত্তি a–এর মান 0 হতে পারবে না। এবং ঋণাত্মক সূচকের জন্য

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ যেখানে } a \neq 0$$

সূচকের বিধিসমূহ

m এবং n দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে কোনো ভিত্তি a–এর জন্য

১. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

অর্থাৎ দুটি সূচক সংখ্যা পূরণের বেলায় যদি তাদের ভিত্তি সমান থাকে সেক্ষেত্রে গুণফল হবে উক্ত ভিত্তির উপর বসানো সূচক সমূহের যোগফল দ্বারা প্রাপ্ত সূচক সংখ্যা

২. $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

অর্থাৎ ভাগের বেলায় ভিত্তি সমান হলে ভাগফলে একই ভিত্তির উপর লবের সূচক থেকে হরের সূচক বিয়োগ করে বসাতে হবে

৩. $(a^m)^n = a^{mn}$

আবার ভিত্তি ab কিংবা $\frac{a}{b}$ হলে

৪. $(ab)^m = a^m b^m$

৫. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

0 এবং 1 দুটি বিশেষ সূচক। যেকোন ভিত্তি a–এর সূচক 0 হলে

৬. $a^0 = 1$ এবং 1 হলে

৭. $a^1 = a$

কোন ভিত্তি a–এর সূচক ভগ্নাংশ হলে সূচকের লব (numerator) অংশ ঘাত (power) এবং হর (denominator) অংশ মূল (root) প্রকাশ করে। অর্থাৎ

৮. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ যেমন $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3}$ ইত্যাদি।

সূচক সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান

উদাহরণ ২.১* মান নির্ণয় কর ঃ ক. $(2^3)^2$; খ. $16^{-\frac{3}{4}}$; গ. $(81)^{.5}$

সমাধান ঃ

ক. $(2^3)^2 = (2 \times 2 \times 2)^2$ কিংবা $(2^3)^2 = 2^6$

$= 8^2$ $\qquad = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 64$ $\qquad = 64$

খ. $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4096}} = \frac{1}{8}$

গ. $(81)^{.5} = (81)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$

---

* উদাহরণের নম্বরে প্রথম অংক (digit) অধ্যায় এবং দ্বিতীয় অংক উদাহরণের ক্রম বুঝায়। পরবর্তিতে উদাহরণ উপস্থাপনের সকল ক্ষেত্রে উদাহরণ শব্দটি লেখা হবে না, সেগুলি শুধু অধ্যায়ের নম্বর এবং উদাহরণের ক্রম দ্বারাই উপস্থাপিত।

২২ সহজভাবে প্রকাশ কর ঃ

ক. $\left(\frac{81}{256}\right)^{-\frac{5}{4}}$ খ. $\frac{(x^2)^3}{(3x^3)^2} + \frac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3}$ গ. $\frac{x^{m+2n} \cdot x^{3m-8n}}{x^{5m-6n}}$

সমাধান ঃ

ক. $\left(\frac{81}{256}\right)^{-\frac{5}{4}} = \left(\frac{3^4}{2^8}\right)^{\frac{5}{4}}$

$$= \frac{(3^4)^{-\frac{5}{4}}}{(2^8)^{-\frac{5}{4}}} = \frac{3^{4\times(-\frac{5}{4})}}{2^{8\times(-\frac{5}{4})}} = \frac{3^{-5}}{2^{-10}} = \frac{1}{3^5} \div \frac{1}{2^{10}}$$

$$= \frac{1}{3^5} \times 2^{10} = \frac{1}{243} \times 1024 = \frac{1024}{243}$$

খ. $\frac{(x^2)^3}{(3x^3)^2} + \frac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3} = \frac{x^6}{3^2x^6} + \frac{6^2x^6}{2^3x^6}$

$$= \frac{1}{3^2} + \frac{6^2}{2^3} = \frac{1}{9} + \frac{36}{8} = \frac{8+324}{72} = \frac{332}{72} = \frac{83}{18}$$

গ. $\frac{x^{m+2n} \cdot x^{3m-8n}}{x^{5m-6n}} = \frac{x^{m+2n+3m-8n}}{x^{5m-6n}}$

$$= \frac{x^{4m-6n}}{x^{5m-6n}} = x^{4m-6n-(5m-6n)} = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

২৩ $\left[1-\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}\right]^{\frac{1}{3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\left[1-\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[1-\{1-\frac{1}{1-x^3}\}^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}}$

$$= \left[1-\left\{\frac{1-x^3-1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}} = \left[1-\left\{\frac{-x^3}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \left[1-\frac{1-x^3}{-x^3}\right]^{-\frac{1}{3}} = \left[\frac{-x^3-1+x^3}{-x^3}\right]^{-\frac{1}{3}} = \left[\frac{-1}{-x^3}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \left[\frac{1}{x^3}\right]^{-\frac{1}{3}} = \left[x^{-3}\right]^{-\frac{1}{3}} = x^{(-3).(-\frac{1}{3})} = x^1 = x$$

২৪ $x^{\frac{2}{3}}$ কে কত সূচকে উন্নীত করলে x পাওয়া যাবে?

সমাধান ঃ $x = x^1$

ধরা যাক, $x^{\frac{2}{3}}$ কে n সূচকে উন্নীত করলে x^1 পাওয়া যাবে। সেক্ষেত্রে

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^n = x^1$$

বা, $x^{\frac{2}{3}n} = x^1$

বা, $\frac{2}{3}n = 1$ $\therefore n = 1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

২৫ $x = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ হলে প্রমাণ কর যে $9x^3 - 27x = 82$

সমাধান ঃ $x = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ $\therefore x^3 = (3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}})^3$

$$= (3^{\frac{2}{3}})^3 + (3^{-\frac{2}{3}})^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{-\frac{2}{3}}(3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}})$$

$$= 3^2 + 3^{-2} + 3^{1+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}(x) \qquad \because (3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}) = x$$

$$= 3^2 + \frac{1}{3^2} + 3x$$
$$= 9 + \frac{1}{9} + 3x$$
$$= \frac{9}{82} + 3x, \quad \text{অর্থাৎ } x^3 = \frac{82}{9} + 3x$$

বা, $9x^3 = 82 + 27x$

$\therefore\ 9x^3 - 27x = 82$ প্রমাণিত।

২৬ মান নির্ণয় কর ঃ $\dfrac{(2^{2n} - 3.2^{2n-2})(3^n - 2.3^{n-2})}{3^{n-4}(4^{n+3} - 2^{2n})}$

সমাধান ঃ লব $= (2^{2n} - 3.2^{2n-2})\ (3^n - 2.3^{n-2})$

$$= (2^{2n} - 3.2^{2n}.2^{-2})(3^n - 2.3^n.3^{-2})$$
$$= 2^{2n}\left(1 - \frac{3}{2^2}\right).3^n\left(1 - \frac{2}{3^2}\right)$$
$$= 2^{2n}\left(1 - \frac{3}{4}\right).3^n\left(1 - \frac{2}{9}\right)$$
$$= 2^{2n}.\frac{1}{4}.3^n.\frac{7}{9}$$
$$= 2^{2n}.3^n.\frac{7}{36}$$

হর $= 3^{n-4}(4^{n+3} - 2^{2n})$

$$= 3^n.3^{-4}\{(2^2)^{n+3} - 2^{2n}\}$$
$$= 3^n.3^{-4}\{2^{2n+6} - 2^{2n}\}$$
$$= 3^n.3^{-4}(2^{2n}.2^6 - 2^{2n})$$
$$= 3^n.3^{-4}.2^{2n}(2^6 - 1)$$
$$= 3^n.\frac{1}{3^4}.2^{2n}(64 - 1)$$
$$= 2^{2n}.3^n.\frac{63}{81}$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত মান} = \frac{\text{লব}}{\text{হর}} = \frac{2^{2n}.3^n.\frac{7}{36}}{2^{2n}.3^n.\frac{63}{81}} = \frac{7}{36} \div \frac{63}{81}$$

$$= \frac{7}{36} \times \frac{81}{63}$$
$$= \frac{1}{4}$$

২৭ প্রমাণ কর যে $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

সমাধান ঃ $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

$= (x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a}$

$= x^{(a-b)(a+b)} \times x^{(b-c)(b+c)} \times x^{(c-a)(c+a)}$

$= x^{a^2-b^2} \times x^{b^2-c^2} \times x^{c^2-a^2}$

$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$

$= x^0$

$= 1$ প্রমাণিত।

২৮ $2^x = 3^y = 12^z$ হলে প্রমাণ কর যে $xy = z(x+2y)$

সমাধান ঃ ধরা যাক $2^x = 3^y = 12^z = k$

$\therefore 2 = k^{\frac{1}{x}}$; $3 = k^{\frac{1}{y}}$ এবং $12 = k^{\frac{1}{z}}$

আবার $12 = 3 \times 2^2$

$k^{\frac{1}{z}} = k^{\frac{1}{y}} \times (k^{\frac{1}{x}})^2$

$= k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{2}{x}}$

$= k^{\frac{1}{y} + \frac{2}{x}}$

$$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{2}{x}$$

বা, $\frac{1}{z} = \frac{x + 2y}{xy}$ $\quad \therefore \; xy = z(x + 2y)$ প্রমাণিত

২.৯ .0001 কে সূচক এবং $1000^{2/3}$ কে সাধারণ আকারে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ

$$.0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4};$$

$$1000^{2/3} = (10^3)^{2/3} = 10^{3.2/3} = 10^2 = 100$$

২.১০ $x^3 = 8$ এবং $y^2 = x$ হলে y^8 এবং y^{12} এর মান কত?

সমাধান ঃ

$$x^3 = 8 = 2^3 \qquad \therefore x = 2$$

$$y^8 = (y^2)^4 = x^4 = 2^4 = 16;$$

$$y^{12} = (y^2)^6 = x^6 = (x^3)^2 = 8^2 = 64$$

২.১১ $a + b + c = 0$ ধরে সরল কর ঃ

$$\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

সমাধান ঃ

প্রথম পদ $\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} = \frac{x^c}{x^{b-c} + x^{-c+c} + x^c}$

(হর এবং লব উভয় অংশকে x^c দ্বারা পূরণ করে)

$$= \frac{x^c}{x^{-a} + 1 + x^c} \quad (\because b + c = -a)$$

তৃতীয় পদ $\frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = \frac{x^{-a}}{x^{a-a} + x^{-b-a} + x^{-a}}$

(হর এবং লব-কে x^{-a} দ্বারা পূরণ করে)

$$= \frac{x^{-a}}{1 + x^c + x^{-a}} \quad (\because -b - a = c)$$

প্রদত্ত বিবৃতি

$$= \frac{x^c}{x^{-a} + 1 + x^c} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{x^{-a}}{1 + x^c + x^{-a}}$$

$$= \frac{x^c + 1 + x^{-a}}{x^{-a} + 1 + x^c} = 1$$

করণী (Surd)

করণী অমূলদ সংখ্যাসমূহের একটি বিশেষ প্রকরণ। কোন মূলদ সংখ্যার মূল যদি অমূলদ হয় তবে এই মূলকে করণী বলে। অর্থাৎ কোন সংখ্যা করণী হলে তার দুটি বৈশিষ্ট্য থাকবে।

১. সংখ্যাটি অমূলদ হবে এবং

২. তা একটি মূলদ সংখ্যার মূল হবে।

$\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{16}$ একেকটি করণী। কিন্তু $\sqrt[3]{8}$ বা $\sqrt{16}$ করণী নয় যেহেতু $\sqrt[3]{8} = 2$ এবং $\sqrt{16} = 4$ উভয়েই মূলদ সংখ্যা। আবার $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ করণী নয় কেননা $2 + \sqrt{2}$ অমূলদ।

সাধারণভাবে, যদি a একটি মূলদ সংখ্যা হয় এবং p ও q দুটি পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে $\sqrt[n]{a} \neq \frac{p}{q}$ হলে $\sqrt[n]{a}$ একটি করণী। এখানে n-কে করণীর শৃঙ্খলা (order) বলে। করণীর শৃঙ্খলা 2 হলে তাকে বর্গ করণী (quadratic surd), 3 হলে ঘন করণী (cubic surd) এবং 4 হলে দ্বিবর্গ করণী (biquadratic surd) বলে।

কোন করণীতে সহগ (co-efficient) থাকতেও পারে, নাও থাকতে পারে যেমন $\sqrt[3]{4}$, $\frac{3}{5}\sqrt{7}$ ইত্যাদি। তবে যদি করণীতে সহগ না থাকে তবে ধরে নেয়া হয় তার সহগের মান ± 1 এবং সহগবিহীন করণীকে সমগ্র করণী (entire surd) বলে। পক্ষান্তরে সসহগ করণীকে মিশ্র করণী (mixed surd) বলে। মিশ্র করণীর সহগও ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক উভয় প্রকার হতে পারে। যেমন, $\sqrt[3]{4}$ একটি সমগ্র করণী এবং $-2\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}\sqrt[5]{7}$, $4\sqrt{11}$ একেকটি মিশ্র করণী। মিশ্র করণীকে সহজেই সমগ্র করণীতে রূপান্তরিত করা যায়। যেমন,

$$-2\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3.6} = -\sqrt[3]{8.6} = -\sqrt[3]{48}$$

কোন করণী $\sqrt[n]{a}$-এর a যদি মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা না হয় তবে তাকে মৌলিক অখণ্ড সংখ্যায় ভেঙে দেখানো যায়। যেমন,

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

করণীর সূত্রসমূহ

১. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\qquad p.\sqrt[n]{a} \times q\sqrt[n]{b} = pq\sqrt[n]{ab}$

২. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\qquad p\sqrt[n]{a} \div q\sqrt[n]{b} = \dfrac{p}{q}\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

৩. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

৪. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$

৫. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

করণীর যোজন, বিয়োজন, পূরণ ও বিভাজন

দুই বা ততোধিক করণীকে সহজভাবে প্রকাশের পর যদি দেখা যায় যে তারা একই মৌলিক করণী দ্বারা গঠিত তবে তাদের সমজাতীয় করণী (similar surd) বলে। বলা বাহুল্য, সমজাতীয় করণীসমূহের শৃঙ্খলাও একই। উদাহরণের মাধ্যমে সমজাতীয় করণীর যোজন ও বিয়োজন দেখানো হল ;

২.১২ $\sqrt{75} + \sqrt{27}$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{25.3} + \sqrt{9.3} \\
&= \sqrt{5^2.3} + \sqrt{3^2.3} \\
&= 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\
&= 8\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

২.১৩ $2\sqrt{128} - \sqrt{162}$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sqrt{64.2} - \sqrt{81.2} \\
&= 2\sqrt{64}\sqrt{2} - \sqrt{81}\sqrt{2} \\
&= 2.8\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \\
&= 16\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \\
&= 7\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x^{c} + 1 + x^{-a}}{x^{-a} + 1 + x^{c}} = 1$$

করণী (Surd)

করণী অমূলদ সংখ্যাসমূহের একটি বিশেষ প্রকরণ। কোন মুলদ সংখ্যার মুল যদি অমূলদ হয় তবে এই মূলকে করণী বলে। অর্থাৎ কোন সংখ্যা করণী হলে তার দুটি বৈশিষ্ট্য থাকবে।

১. সংখ্যাটি অমূলদ হবে এবং
২. তা একটি মূলদ সংখ্যার মুল হবে।

$\sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt[3]{16}$ একেকটি করণী। কিন্তু $\sqrt[3]{8}$ বা $\sqrt{16}$ করণী নয় যেহেতু $\sqrt[3]{8} = 2$ এবং $\sqrt{16} = 4$ উভয়েই মূলদ সংখ্যা। আবার $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ করণী নয় কেননা $2 + \sqrt{2}$ অমূলদ।

সাধারণভাবে, যদি a একটি মূলদ সংখ্যা হয় এবং p ও q দুটি পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে $\sqrt[n]{a} \neq \frac{p}{q}$ হলে $\sqrt[n]{a}$ একটি করণী। এখানে n-কে করণীর শৃঙ্খলা (order) বলে। করণীর শৃঙ্খলা 2 হলে তাকে বর্গ করণী (quadratic surd), 3 হলে ঘন করণী (cubic surd) এবং 4 হলে দ্বিবর্গ করণী (biquadratic surd) বলে।

কোন করণীতে সহগ (co-efficient) থাকতেও পারে, নাও থাকতে পারে যেমন $\sqrt[3]{4}$, $\frac{3}{5}\sqrt{7}$ ইত্যাদি। তবে যদি করণীতে সহগ না থাকে তবে ধরে নেয়া হয় তার সহগের মান ± 1 এবং সহগবিহীন করণীকে সমগ্র করণী (entire surd) বলে। পক্ষান্তরে সসহগ করণীকে মিশ্র করণী (mixed surd) বলে। মিশ্র করণীর সহগও ধনাত্নক কিংবা ঋণাত্নক উভয় প্রকার হতে পারে। যেমন, $\sqrt[3]{4}$ একটি সমগ্র করণী এবং $-2\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}\sqrt[5]{7}$, $4\sqrt{11}$ একেকটি মিশ্র করণী। মিশ্র করণীকে সহজেই সমগ্র করণীতে রূপান্তরিত করা যায়। যেমন,

$$-2\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3.6} = -\sqrt[3]{8.6} = -\sqrt[3]{48}$$

কোন করণী $\sqrt[n]{a}$-এর a যদি মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা না হয় তবে তাকে মৌলিক অখণ্ড সংখ্যায় ভেঙ্গে দেখানো যায়। যেমন,

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

করণীর সূত্রসমূহ

১. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $p.\sqrt[n]{a} \times q\sqrt[n]{b} = pq\sqrt[n]{ab}$

২. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $p\sqrt[n]{a} \div q\sqrt[n]{b} = \dfrac{p}{q}\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

৩. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

৪. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$

৫. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

করণীর যোজন, বিয়োজন, পূরণ ও বিভাজন

দুই বা ততোধিক করণীকে সহজভাবে প্রকাশের পর যদি দেখা যায় যে তারা একই মৌলিক করণী দ্বারা গঠিত তবে তাদের সমজাতীয় করণী (similar surd) বলে। বলা বাহুল্য, সমজাতীয় করণীসমূহের শৃঙ্খলাও একই। উদাহরণের মাধ্যমে সমজাতীয় করণীর যোজন ও বিয়োজন দেখানো হল ;

২.১২ $\sqrt{75} + \sqrt{27}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{25.3} + \sqrt{9.3} \\ &= \sqrt{5^2.3} + \sqrt{3^2.3} \\ &= 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

২.১৩ $2\sqrt{128} - \sqrt{162}$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{64.2} - \sqrt{81.2} \\ &= 2\sqrt{64}\sqrt{2} - \sqrt{81}\sqrt{2} \\ &= 2.8\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \\ &= 16\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

২.১৪ $2\sqrt{180} - 7\sqrt{20} + 10\sqrt{45} = 2\sqrt{36.5} - 7\sqrt{4.5} + 10\sqrt{9.5}$

$$= 2.6\sqrt{5} - 7.2\sqrt{5} + 10.3\sqrt{5}$$
$$= 12\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 30\sqrt{5}$$
$$= 28\sqrt{5}$$

করণীসমূহের পূরণ ও বিভাজনের জন্য তাদের শৃঙ্খলা একই হতে হবে।

২.১৫ $6\sqrt[3]{4} \times 3\sqrt[3]{2} \quad = 6 \times 3 \times \sqrt[3]{4.2}$

$$= 18\sqrt[3]{8}$$
$$= 18.2$$
$$= 36$$

২.১৬ $6\sqrt[3]{4} \div 3\sqrt[3]{2} \quad = \dfrac{6\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{2}} = \dfrac{6}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4}{2}} = 2\sqrt[3]{2}$

২.১৭ $(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})$

$$= \sqrt{5}.\sqrt{3} - \sqrt{3}.\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{3} + \sqrt{5}.\sqrt{2} - \sqrt{3}.\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{15} - 3 + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{1}$$
$$= \sqrt{15} - 3 + \sqrt{\frac{3.2}{2.2}} + \sqrt{10} - \sqrt{6} + 1$$
$$= \sqrt{15} + \sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{6} - 2$$
$$= \sqrt{15} + \sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{6} - 2$$

করণীর মূলদকরণ (Rationalization of surd)

দুটি করণীকে পূরণ করলে যদি গুণফল একটি মূলদসংখ্যা হয় তবে পূরণের এই প্রক্রিয়াকে করণীর মূলদকরণ বলা হয়। এবং করণীদ্বয়ের একটিকে অপরটির মূলদকারী গুণক (rationalizing factor) বলে।

$\sqrt{3}$–এর জন্য মূলদকারী গুণক $\sqrt{3}$ কেননা $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ একটি মূলদ সংখ্যা। আবার

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ কে মূলদকরণের জন্য $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ দ্বারা পূরণ করতে হবে এবং
$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
এক্ষেত্রে $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ এর মূলদকারী গুণক হচ্ছে $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

২.১৮ হর অংশকে মূলদ সংখ্যায় প্রকাশ কর ঃ $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

সমাধান ঃ
$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}^2)}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}.2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6}}{4}$$

২.১৯ $\sqrt{6} = 2.45$ হলে $\dfrac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{48} + \sqrt{18}}$ –এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\dfrac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{48} + \sqrt{18}} = \dfrac{(7\sqrt{3} - 5\sqrt{2})(\sqrt{48} - \sqrt{18})}{(\sqrt{48} + \sqrt{18})(\sqrt{48} - \sqrt{18})}$

$$= \frac{\sqrt{48}\,(7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) - \sqrt{18}(7\sqrt{3} - 5\sqrt{2})}{48 - 18}$$

$$= \frac{7\sqrt{3.48} - 5\sqrt{2.48} - 7\sqrt{3.18} + 5\sqrt{2.18}}{30}$$

$$= \frac{7\sqrt{3.3.16} - 5\sqrt{2.3.16} - 7\sqrt{3.2.9} + 5\sqrt{2.2.9}}{30}$$

$$= \frac{7.3.4 - 5.4\sqrt{6} - 7.3\sqrt{6} + 30}{30}$$

$$= \frac{114 - 41\sqrt{6}}{30}$$

$$= \frac{114 - 41.(2.45)}{30} \qquad (\because \sqrt{6} = 2.45)$$

$$= \frac{114 - 100.45}{30}$$

$$= 0.4516$$

২.২০ $x = \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ হলে $\frac{x + \sqrt{8}}{x - \sqrt{8}} + \frac{x + \sqrt{12}}{x - \sqrt{12}}$ এর মান কত?

সমাধান :

$$x = \frac{x\sqrt{24}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{24}\,(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})\,(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{48} - 2\sqrt{72}}{2 - 3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3.16} - 2\sqrt{2.36}}{-1}$$

$$= \frac{2.4\sqrt{3} - 2.6\sqrt{2}}{-1}$$

$$= \frac{8\sqrt{3} - 12\sqrt{2}}{-1}$$

$$= 12\sqrt{2} - 8\sqrt{3}$$

এখন, $\frac{x + \sqrt{8}}{x - \sqrt{8}} = \frac{x + 2\sqrt{2}}{x - 2\sqrt{2}}$

$$= \frac{12\sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{12\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} \quad (\because x = 12\sqrt{2} - 8\sqrt{3})$$

$$= \frac{14\sqrt{2} - 8\sqrt{3}}{10\sqrt{2} - 8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{7\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(7\sqrt{2} - 4\sqrt{3})(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})}{(5\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{35.2 + 28\sqrt{6} - 20\sqrt{6} - 16.3}{25.2 - 16.3}$$

$$= \frac{22 + 8\sqrt{6}}{2}$$

$$= 11 + 4\sqrt{6}$$

অনুরূপভাবে নির্ণয় কর যে $\frac{x + \sqrt{12}}{x - \sqrt{12}} = -9 - 4\sqrt{6}$

এবং $\frac{x + \sqrt{8}}{x - \sqrt{8}} + \frac{x + \sqrt{12}}{x - \sqrt{12}} = 11 + 4\sqrt{6} - 9 - 4\sqrt{6}$

$$= 2$$

২.২১ $\dfrac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{5}-3i} = a + bi$ হলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\dfrac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{5}-3i} = \dfrac{(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{5}+3i)}{(\sqrt{5}-3i)(\sqrt{5}+3i)}$

$$= \frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}i+2\sqrt{5}i+6i^2}{(\sqrt{5})^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}i+2\sqrt{5}i+6.(-1)}{5-9.(-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{15}-6+i\,(3\sqrt{3}+2\sqrt{5})}{5+9}$$

$$= \frac{\sqrt{15}-6}{14} + i.\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{14}$$

$$= a + bi$$

এখান থেকে $a = \dfrac{\sqrt{15}-6}{14}$ এবং $b = \dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{14}$

২.২২ $x = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\left(x - \dfrac{\sqrt{126}}{\sqrt{42}}\right) \times \left(x - \dfrac{1}{x - 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \left(x - \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{42}}\right)\left(x - \frac{1}{x - 2\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{42}}\right) \times$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{126}{42}}\right) \times$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{4-2}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= \left(\frac{4-3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{8-3}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{5}{6}$$

২.২৩ $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

সমাধান ঃ $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ $\therefore \frac{1}{x} = \frac{2}{5 - \sqrt{21}} = \frac{2(5 + \sqrt{21})}{(5 - \sqrt{21})(5 + \sqrt{21})}$

$$= \frac{10 + 2\sqrt{21}}{25 - 21}$$

$$= \frac{10 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5-\sqrt{21}}{2} + \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$= \frac{5-\sqrt{21}+5+\sqrt{21}}{2} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$= 5^2 - 2$$

$$= 23$$

এবং $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= 5^3 - 3.5$$

$$= 110$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 110 - 5.23 + 5$$

$$= 100 - 115 + 5$$

$= 0$ প্রমাণিত।

মিশ্র করণীর বৈশিষ্ট্য ঃ

১. $a + \sqrt{b} = 0$ হবে শুধুমাত্র তখনই যখন $a = b = 0$

২. $a + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ হলে $a = 0$ এবং $b = c$

৩. $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ হলে $a = c$ এবং $b = d$

৪. $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ হলে
$a - \sqrt{b} = \pm(\sqrt{c} - \sqrt{d})$

২.২৪ $\dfrac{1+\sqrt{48}}{5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{72} - \sqrt{108} + \sqrt{8} + 2} = a + b\sqrt{3}$ হলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\dfrac{1+\sqrt{48}}{5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{72} - \sqrt{108} + \sqrt{8} + 2}$

$$= \frac{1 + 4\sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2}$$

$$= \frac{1 + 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 4.3}{4 - 3}$$

$$= 14 + 9\sqrt{3}$$

যেহেতু $14 + 9\sqrt{3} = a + b\sqrt{3}$, $a = 14$ এবং $b = 9$

২.২৫ $\dfrac{1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{3}} = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$ হলে a, b, c এবং d এর মান কত?

সমাধান ঃ $\dfrac{1}{1 1 \sqrt{5} + \sqrt{3}} = \dfrac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{5} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{3})}$

$$= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 3}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{5} - \sqrt{3})(3 - 2\sqrt{5})}{(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2.5 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{9 - 4.5}$$

$$= \frac{-7 + \sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{-11}$$

$$= \frac{7}{11} - \frac{1}{11}\sqrt{5} + \frac{3}{11}\sqrt{3} - \frac{2}{11}\sqrt{15}$$

যেহেতু $\frac{7}{11} - \frac{1}{11}\sqrt{5} + \frac{3}{11}\sqrt{3} - \frac{2}{11}\sqrt{15}$

$$= a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$$

$a = \frac{7}{11}$, $b = \frac{3}{11}$, $c = -\frac{1}{11}$ এবং $d = -\frac{2}{11}$

মিশ্র করণীর বর্গমূল নির্ণয়

$a + \sqrt{b}$ মিশ্র করণীর বর্গমূল $= \sqrt{a + \sqrt{b}}$

ধরা যাক $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$: এর উভয় পক্ষকে বর্গ করলে,

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

এখান থেকে

$$x + y = a \qquad \ldots (1)$$

এবং $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$

বা, $4xy = b \qquad \ldots (2)$

আবার,

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

$$= a^2 - b$$

$$\therefore\ x - y = \pm\sqrt{a^2 - b} \qquad \ldots (3)$$

ধনাত্মক মান নিলে $x - y = \sqrt{a^2 - b}$

এবং

$$x + y = a$$

$x - y = \sqrt{a^2 - b}$ দুটি সমীকরণ থেকে $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b}$

$$y = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b}$$

এভাবে

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}$$

লক্ষণীয় যে (3) নং সমীকরণ থেকে $x - y = -\sqrt{a^2 - b}$ নিলে

$$x = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b}) \text{ এবং } y = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})$$

এবং তাতে $\sqrt{a + \sqrt{b}}$–এর মান অপরিবর্তিত থাকবে।

২.২৬ $3 + \sqrt{5}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

উভয় পাশকে বর্গ করলে $3 + \sqrt{5} = x + y + 2\sqrt{xy}$

$\therefore\ x + y = 3$ এবং $4xy = 5$

আবার, $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

$= 3^2 - 5$

$= 4$

$\therefore x - y = 2$

এখন, $x + y = 3$ এবং $x - y = 2$ সমীকরণদ্বয় থেকে

$x = \frac{5}{2}$ এবং $y = \frac{1}{2}$

$$\therefore \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5} + 1)$$

২.২৭ $\sqrt{6+8i}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক $\sqrt{6+8i} = a + ib$, যেখান থেকে

$$6 + 8i = a^2 - b^2 + 2iab$$

$\therefore a^2 - b^2 = 6$ এবং $ab = 4$ ($\because 2iab = 8i$)

আবার $ab = 4$ হলে $b = \frac{4}{a}$ $\therefore b^2 = \frac{16}{a^2}$

এখন $a^2 - b^2 = 6$

বা, $a^2 - \frac{16}{a^2} = 6$

বা, $a^4 - 16 = 6a^2$

বা, $a^4 - 6a^2 - 16 = 0$

বা, $(a^2 - 8)(a^2 + 2) = 0$ $=> a^2 - 8 = 0$

$\therefore a^2 = 8$

অথবা $a^2 + 2 = 0$

$\therefore a^2 = -2$

কিন্তু $a^2 = -2$ হতে পারে না ($\because$ a একটি বাস্তব সংখ্যা ; তাই $a^2 = 8$ $\therefore a = \sqrt{8}$

এবং $b^2 = \frac{16}{a^2} = \frac{16}{8} = 2$ $\therefore b = \sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{6+8i} = \sqrt{8} + i\sqrt{2}$

অনুশীলনী — ২

১. নিচের বিবৃতিসমূহ সঠিক কি না যুক্তিসহ দেখাও ঃ

ক. $a^m = a^n$ $=> m = n$

খ. $a^m = b^m$ $=> a = b$

গ. $3^{2^3} = (3^2)^3$

ঘ. $p > q \to p^3 > q^3$

ঙ. $p > q \to p^{-1} > q^{-1}$

২. সহজরূপে প্রকাশ কর :

ক. $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^8$; খ. $\dfrac{\sqrt[3]{(343)^{-2}}}{\sqrt[5]{(32)^{-3}}}$;

গ. $\dfrac{a^{\frac{6}{7}}.\sqrt[5]{a^3}.\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[8]{a^{-3}}.\sqrt[5]{a^8b^5}} \cdot \dfrac{b^2}{a^{\frac{3}{8}}}$ ঘ. $\dfrac{5^{2x+3}.10^{4x+1}}{25^{3x+2}.16^{x-\frac{1}{3}}}$;

ঙ. $\left(\dfrac{p^z}{p^y}\right)^{x+y} \times \left(\dfrac{p^y}{p^z}\right)^{y+z} \div 3\,(p^xp^z)^{x-z}$

৩. প্রমাণ কর যে

ক. $$\left\{\frac{9^{n+\frac{1}{2}}.\sqrt{3.3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}} = 27$$

খ. $$\sqrt[m+n]{\frac{x^{m^2}}{x^{n^2}}} \times \sqrt[m+p]{\frac{x^{n^2}}{x^{p^2}}} \times \sqrt[p+m]{\frac{x^{p^2}}{x^{m^2}}} - 1$$

গ. $$\left(x^{\frac{1}{a-b}}\right)^{\frac{1}{a-c}} \times \left(x^{\frac{1}{b-c}}\right)^{\frac{1}{b-a}} \times \left(x^{\frac{1}{c-a}}\right)^{\frac{1}{c-b}} = 1$$

৪. $a = b^c$, $b = c^a$ এবং $c = a^b$ হলে দেখাও যে $abc = 1$

৫. $x = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ হলে দেখাও যে $x^3 + 3x = 2$

৬. $2^x = 4^y = 8^z$ এবং $xyz = 288$ হলে দেখাও যে

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{8z} = \frac{11}{96}$$

৭. $x = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}$ হলে দেখাও যে, $3x^3 - 9x = 10$

৮. $a^x = \left(\frac{a}{k}\right)^y = k^m$ হলে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{m}$

৯. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{1 + x^{a-b} + x^{a-c}} + \frac{1}{1 + x^{b-c} + x^{b-a}} + \frac{1}{1 + x^{c-a} + x^{c-b}} = 1$$

$$\left[\text{সংকেত ঃ } \frac{1}{1 + x^{a-b} + x^{a-c}} = \frac{x^{-a}}{x^{-a}(1 + x^{a-b} + x^{a-c})} = \frac{x^{-a}}{x^{-a} + x^{-b} + x^{-c}} \right]$$

১০. নিচের কোনটি করণী এবং কোনটি করণী নয় নির্ণয় কর ঃ

ক. $\sqrt[3]{64}$ খ. $\sqrt{\frac{4}{121}}$ গ. $\sqrt[5]{243}$ ঘ. $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ ঙ. $\sqrt[5]{64}$

১১. সহজরূপে প্রকাশ কর ঃ

ক. $3\sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

খ. $2\sqrt{18} + \sqrt{20} - \sqrt{147} + \frac{1}{2}\sqrt{50} + \frac{4}{3}\sqrt{45}$

গ. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

ঘ. $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{7 - 3\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

১২. $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ এবং $y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ হলে

$3x^2 - 5xy + 3y^2$এর মান নির্ণয় কর।

১৩. $\sqrt{3} = 1.732$ এবং $\sqrt{5} = 2.236$ হলে $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4+\sqrt{15}}$ এর মান কত?

১৪. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হলে
$\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1}$ -এর মান কত?

১৫. $2\sqrt{54} + 5\sqrt{294} + \dfrac{19}{30}\sqrt{6} - \sqrt{\dfrac{27}{50}} - \dfrac{2}{3} = a\sqrt{6}$ হলে a-এর মান কত?

১৬. $x = 3 + \sqrt{8}$ হলে মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$

খ. $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

গ. $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

১৭. $x = 3 + 2\sqrt{2}$, $y = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$ হলে $5x^2 + 10xy + 5y^2$ -এর মান কত?

১৮. বর্গমূল নির্ণয় কর ঃ

ক. $19 - 8\sqrt{3}$

খ. $\sqrt{32} - \sqrt{24}$

গ. $6(5 + 2\sqrt{6}$

১৯. মান নির্ণয় কর ঃ $\dfrac{\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2} - \sqrt{38 + 5\sqrt{3}}}$

তৃতীয় অধ্যায়

সমাহার তত্ত্ব
[SET THEORY]

নির্দিষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত পৃথক পৃথক বস্তুর নির্দিষ্ট সমষ্টিকে সমাহার (set) বলে। যেমন ঃ

ক. 200 এবং 300 এর মধ্যবর্তী সকল বেজোড় (odd) সংখ্যা ;

খ. ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের প্রথম বর্ষের সকল ছাত্রছাত্রী ;

গ. বাংলাদেশে বাংলা ভাষায় প্রকাশিত সকল দৈনিক পত্রিকা ইত্যাদি। প্রদত্ত সংজ্ঞা ও উদাহরণ থেকে সমাহারের দুটি বৈশিষ্ট্য লক্ষণীয় ঃ

— সমাহারকে নির্দিষ্টভাবে নির্ধারিত হতে হবে এবং

— সমাহারের বস্তু (objects) বা উপাদান (elements) সম্পর্কে স্পষ্ট বর্ণনা থাকতে হবে।

সমাহারের উপাদান বলতে কোনো সমাহার যে সকল বস্তু দ্বারা গঠিত তাদেরকেই বোঝায়। উপরের ক. উদাহরণে বর্ণিত সমাহারের উপাদান হচ্ছে 101, 103, 105, ..., 299 কিংবা খ. উদাহরণে বর্ণিত সমাহারের উপাদান হবে ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের প্রথম বর্ষে অধ্যয়নরত একেকজন ছাত্র বা ছাত্রী।

সমাহার বা তার উপাদানসমূহকে গাণিতিকভাবে লেখার একটি নির্দিষ্ট রীতি আছে। কোন সমাহারের নাম A হলে এবং তার উপাদানকে x দ্বারা চিহ্নিত করলে লেখা হয়

$x \in A$ অর্থাৎ x A–এর অন্তর্ভুক্ত।

আবার কোন উপাদান r কোন সমাহার B–এর অন্তর্ভুক্ত না হলে লেখা হয়

$r \notin B$ অর্থাৎ r B এর অন্তর্ভুক্ত নয়।

সমাহারকে বর্ণনার যেসব রীতি প্রচলিত সেগুলিকে মোটামুটি দুভাগে বিভক্ত করা যায় ঃ ক. তালিকা পদ্ধতি (tabular method) এবং খ. বাছাই পদ্ধতি (selector method)। প্রথমোক্ত পদ্ধতিতে সমাহারের সবকটি উপাদানকে উল্লেখ করে তার বর্ণনা দেয়া হয়। যেমন, 1 থেকে 10 পর্যন্ত সকল জোড় (even) সংখ্যার সমাহার $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

বাছাই পদ্ধতিতে সমাহারের বর্ণনা দেয়ার ক্ষেত্রে সব উপাদানের তালিকা না দিয়ে তাদের প্রধান বৈশিষ্ট্য চিহ্নিত করে দেয়া হয়। এ পদ্ধতিতে উপরের X সমাহারকে লেখা হবে :

$X = \{x|$ x হচ্ছে 1 থেকে 10 পর্যন্ত সকল জোড় সংখ্যা$\}$

সমাহারের শ্রেণীকরণ

সমাহার বিভিন্ন প্রকার হতে পারে। শ্রেণীকরণের ভিত্তি অনুযায়ী তাদের নির্দিষ্ট নাম আছে। এসবের মধ্যে কয়েকটি হচ্ছে সসীম সমাহার (finite set), অসীম সমাহার (infinite set), একক সমাহার (unit set), শূন্য সমাহার (empty set, null or void set) ইত্যাদি। নিচে প্রতিটির সংজ্ঞা ও উদাহরণ দেয়া হল।

সসীম সমাহার

যে সকল সমাহারের উপাদান সংখ্যা সীমিত অর্থাৎ সব কটি উপাদান গণনা করে নির্ধারণ করা যায় তাদের সসীম সমাহার বলে। যেমন

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

$B = \{x|$ x বছরের একটি মাস$\}$;

$C = \{x|$ 1 থেকে 10000000 পর্যন্ত 3 দ্বারা বিভাজ্য সকল বেজোড় সংখ্যা ইত্যাদি

কোন সমাহারের উপাদানের সংখ্যা যত বড়ই হোক তা গণনার মধ্যে পড়লে অর্থাৎ কোনভাবে তাদের সংখ্যাসীমা নির্ধারিত থাকলে সমাহারটি সসীম হবে। বছরের কোন বিশেষ দিনের বিশেষ মুহূর্তে বাংলাদেশে মোট নারী ও পুরুষ (শিশুসহ) মানুষের সংখ্যা গণনার ফল ভ্রান্তিপূর্ণ হতে পারে কিন্তু এই সংখ্যা অসীম নয়, তাই তাদের সমাহারও সসীম হবে।

অসীম সমাহার

যে সকল সমাহারের উপাদানসমূহ কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যাসীমা দ্বারা নির্ধারিত নয় তাদের অসীম সমাহার বলে। যেমন,

$A = \{1, 2, 3. 4, \ldots\ldots\}$;

$B = \{x|$ x একটি জোড় সংখ্যা$\}$;

$C = \{x|$ x তিন দ্বারা বিভাজ্য একটি সংখ্যা $\}$ ইত্যাদি।

একক সমাহার

কোন সমাহারের উপাদান সংখ্যা মাত্র একটি হলে তাকে একক সমাহার বলে। একক সমাহারকে অনেক সময় এক উপাদানের সমাহারও (Singleton) বলা হয়।

$A = \{a\}$ একক সমাহারের একটি উদাহরণ। এমনি আরও উদাহরণ হতে পারে।

$A = \{x \mid x$ 20 এবং 30 এর মধ্যবর্তী একটি যথার্থ বর্গ সংখ্যা $\}$;

$B = \{x \mid x$ মনুষ্যবসতিপূর্ণ একটি গ্রহ$\}$ ইত্যাদি।

শূন্য সমাহার

উপাদানহীন সমাহারকে শূন্য সমাহার বলা হয়। যেমন,

$A = \{x \mid x$ 50 এবং 60 এর মধ্যবর্তী একটি যথার্থ বর্গ সংখ্যা$\}$;

$B = \{x \mid x$ পাঁচ মাথাবিশিষ্ট জীবন্ত সকল মানুষ $\}$ ইত্যাদি।

শূন্য সমাহারকে লেখার জন্য $\emptyset$ (phi) অক্ষর ব্যবহার করা হয় এবং উপরের উদাহরণদ্বয়ের ক্ষেত্রে $A = \emptyset$ এবং $B = \emptyset$.

সমাহারসমূহের সমতা (Equality) **ও সমতুল্যতা** (Equivalence)

A এবং B দুটি আলাদা সমাহার একে অপরের সমান হতে পারে ঠিক তখনই যখন তাদের একটির প্রতিটি উপাদান অপরটির প্রতিটি উপাদানের সমান। বলার অপেক্ষা রাখে না যে দুটি সমাহার সমান হলে তাদের উপাদান সংখ্যাও সমান। ধরা যাক,

$A = \{3, 7, 9, 11, 15\}$ এবং

$B = \{7, 9, 3, 15, 11\}$

সমাহারদ্বয়ের উপাদানসমূহের অনুক্রম বিভিন্ন হলেও উভয়ের সকল উপাদান একই, অতএব $A = B$। দুইটি সমাহার A এবং B সমান হলে গাণিতিকভাবে তার শর্তটি নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায় ঃ

x-এর সকল মানের জন্য

$x \in A \longleftrightarrow x \in B$ হলে $A = B$

দুটি সমাহার $A = \{3, 4\}$ এবং $B = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$ দেয়া থাকলে $A = B$ হবে। আবার, নিচের তিনটি সমাহার লক্ষ্য কর ঃ

$A = \{x \mid x$ দহরম শব্দের একটি অক্ষর $\}$,

B = {দ, ম, র, হ},

C = { x | x হরদম শব্দের একটি অক্ষর}

প্রদত্ত উদাহরণসমূহের ক্ষেত্রেও A = B = C। পরস্পর সমান সমাহারসমূহকে অনেক সময় অভেদ সমাহার বা identical set নামেও অভিহিত করা হয়।

দুটি সমাহার A এবং B একটি অপরটির সমতুল্য (Equivalent) হয় যখন একটির প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে অপরটির প্রতিটি উপাদান সামঞ্জস্যপূর্ণ। অন্য কথায়, দুটি সমতুল্য সমাহারের একটির প্রতিটি উপাদানের বিপরীতে অপরটির নির্দিষ্ট একটি উপাদান থাকবে যেমন,

A = {p, q, r, s, t } এবং B = {3, 5, 8, 9, 10 }

লক্ষণীয় যে সমতুল্য দুটি সমাহারের একটির উপাদান সংখ্যা অপরটির উপাদান সংখ্যার সমান. দুটি সমতুল্য সমাহার A এবং B কে A   B লিখে প্রকাশ করা হয়।

উপসমাহার (Subset)

কোন একটি সমাহারের সব কটি উপাদান যদি অন্য কোন একটি সমাহারেও থাকে তবে প্রথম সমাহারটিকে দ্বিতীয়টির উপসমাহার বলে। A এবং B দুটি সমাহারের A B–এর উপসমাহার হলে B–এর উপাদান সংখ্যা A–এর উপাদান সংখ্যার সমান কিংবা বেশি হবে. অর্থাৎ প্রতিটি সমাহারই তার সমান কোন সমাহারের উপসমাহার হতে পারে। অপরদিকে যদি দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে AB সমাহারের উপসমাহার হয় এবং B–এর উপাদানসংখ্যা A–এর উপাদানসংখ্যার অন্তত একটিও বেশি হয় তবে A সমাহারকে B সমাহারের যথার্থ উপসমাহার (proper subset) বলে। উদাহরণ ঃ

A = {p, q, r, s, t } এবং

B = { a, b, c, p, q, r, s, t, z } দুটি সমাহার থাকলে A B–এর যথার্থ উপসমাহার এবং তা $A \subset B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যখন কোন দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে A B–এর উপসমাহার জানা থাকে কিন্তু দুটিরই অথবা তাদের যেকোন একটির উপাদানসংখ্যা অজানা থাকে সেক্ষেত্রে $A \subseteq B$ লেখা হয়। $A \subseteq$–এর অর্থ A B–এর যথার্থ উপসমাহার অথবা A = B। জেনে রাখা ভাল যে শূন্য সমাহার যেকোন সমাহারেরই উপসমাহার হতে পারে অর্থাৎ $\emptyset \subset A$ যেখানে A যেকোন সমাহার। এছাড়া কোন সমাহার A যদি অপর কোন সমাহার B এর উপসমাহার এবং B সমাহার তৃতীয় একটি সমাহার C–এর উপসমাহার হয় তবে A C–এর উপসমাহার হবে, অর্থাৎ

যদি $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হয় তবে $A \subset C$

B = {দ, ম, র, হ},

C = { x | x হরদম শব্দের একটি অক্ষর}

প্রদত্ত উদাহরণসমূহের ক্ষেত্রেও A = B = C। পরস্পর সমান সমাহারসমূহকে অনেক সময় অভেদ সমাহার বা identical set নামেও অভিহিত করা হয়।

দুটি সমাহার A এবং B একটি অপরটির সমতুল্য (Equivalent) হয় যখন একটির প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে অপরটির প্রতিটি উপাদান সামঞ্জস্যপূর্ণ। অন্য কথায়, দুটি সমতুল্য সমাহারের একটির প্রতিটি উপাদানের বিপরীতে অপরটির নির্দিষ্ট একটি উপাদান থাকবে যেমন,

A = {p, q, r, s, t} এবং B = {3, 5, 8, 9, 10}

লক্ষণীয় যে সমতুল্য দুটি সমাহারের একটির উপাদান সংখ্যা অপরটির উপাদান সংখ্যার সমান দুটি সমতুল্য সমাহার A এবং B কে A ≡ B লিখে প্রকাশ করা হয়।

উপসমাহার (Subset)

কোন একটি সমাহারের সব কটি উপাদান যদি অন্য কোন একটি সমাহারেও থাকে তবে প্রথম সমাহারটিকে দ্বিতীয়টির উপসমাহার বলে। A এবং B দুটি সমাহারের A B–এর উপসমাহার হলে B–এর উপাদান সংখ্যা A–এর উপাদান সংখ্যার সমান কিংবা বেশি হবে। অর্থাৎ প্রতিটি সমাহারই তার সমান কোন সমাহারের উপসমাহার হতে পারে। অপরদিকে যদি দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে AB সমাহারের উপসমাহার হয় এবং B–এর উপাদানসংখ্যা A–এর উপাদানসংখ্যার অন্তত একটিও বেশি হয় তবে A সমাহারকে B সমাহারের যথার্থ উপসমাহার (proper subset) বলে। উদাহরণ ঃ

A = {p, q, r, s, t} এবং

B = {a, b, c, p, q, r, s, t, z} দুটি সমাহার থাকলে A B–এর যথার্থ উপসমাহার এবং তা $A \subset B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যখন কোন দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে A B–এর উপসমাহার জানা থাকে কিন্তু দুটিরই অথবা তাদের যেকোন একটির উপাদানসংখ্যা অজানা থাকে সেক্ষেত্রে $A \subseteq B$ লেখা হয়। $A \subseteq$–এর অর্থ A B–এর যথার্থ উপসমাহার অথবা A = B। জেনে রাখা ভাল যে শূন্য সমাহার যেকোন সমাহারেরই উপসমাহার হতে পারে অর্থাৎ $\emptyset \subset A$ যেখানে A যেকোন সমাহার। এছাড়া কোন সমাহার A যদি অপর কোন সমাহার B এর উপসমাহার এবং B সমাহার তৃতীয় একটি সমাহার C–এর উপসমাহার হয় তবে A C–এর উপসমাহার হবে, অর্থাৎ

যদি $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হয় তবে $A \subset C$

এবং শুধু বাণিজ্যিক আইন পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা হবে

$$n(C') = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$= 152 - 36 - 27 + 11$$
$$= 100$$

অতএব শুধু একটি বিষয় পড়ে এমন ছাত্রের মোট সংখ্যা হবে $(59 + 76 + 100) = 235$ জন।

৩.৫ একটি শহরের মোট লোকসংখ্যা 50,000. এদের মধ্যে 18000 জন পড়ে ইত্তেফাক পত্রিকা এবং 13000 জন পড়ে সংবাদ। যদি দুটি পত্রিকাই পড়ে এমন লোকের সংখ্যা 4000 হয় তবে শহরের শতকরা কতভাগ লোক কোন পত্রিকাই পড়ে না?

সমাধান ঃ ধরা যাক $n(A)$ = ইত্তেফাক পাঠকের সংখ্যা

$n(B)$ = সংবাদ পাঠকের সংখ্যা

শর্তানুযায়ী $n(A) = 18000$, $n(B) = 13000$ এবং

$n(A \cap B) = 4000$

দুটি পত্রিকার যেকোন একটি অথবা দুটিই পড়ে এমন লোকের সংখ্যা

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 18000 + 13000 - 4000$$
$$= 27000$$

কোন পত্রিকাই পড়ে না এমন লোকের সংখ্যা $= 50000 - 27000$

$= 23000$

এবং তাদের শতকরা হার $= \dfrac{23000 \times 100}{50000} = 46\%$

৩.৬ কোন কোম্পানির একটি পণ্যের চাহিদা সমীক্ষার একটি প্রতিবেদন তৈরির জন্য তথ্য সংগ্রহের পর নিচের তালিকাটি পাওয়া গেল ঃ

মাস	মোট ক্রেতার মধ্যে পণ্যটি ক্রয়কারীর সংখ্যার শতকরা হার
জানুয়ারি	59
ফেব্রুয়ারি	62

কোন সমাহার A অন্য একটি সমাহার B–এর উপসমাহার না হলে বুঝতে হবে A–তে অন্তত এমন একটি উপাদান আছে যা B–তে নেই। এছাড়া প্রতিটি সমাহারই তার নিজের উপসমাহার।

সার্বজনীন সমাহার (Universal set)

নির্দিষ্ট কোন সমাহারের উপাদানসমূহ পরীক্ষা করলে দেখা যাবে এ উপাদানসমূহ বৃহত্তর কোন–না–কোন সমাহারের উপাদানসমূহের অংশ। সেক্ষেত্রে এই বৃহত্তর সমাহারকে নির্দিষ্ট সমাহারটির সার্বজনীন সমাহার বলা হবে। যেমন ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের ছাত্রবৃন্দ ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্রবৃন্দেরই একটি অংশ এবং সে কারণে বাণিজ্য অনুষদের ছাত্রদের সমাহারের জন্য সার্বজনীন সমাহার হবে বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্রদের সমাহার। নিচের সমাহার দুটি লক্ষ্য কর ঃ

$A = \{x \mid x$ বাংলাদেশের একটি মহাবিদ্যালয় $\}$

$B = \{x \mid x$ বাংলাদেশের একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠান $\}$

উদাহরণে B সমাহারটি A সমাহারের জন্য সার্বজনীন সমাহার হিসাবে চিহ্নিত হবে।

সমাহারের ছেদন (Intersection of sets)

দুটি সমাহারের ছেদনের ফলে এমন একটি তৃতীয় সমাহার তৈরি হয় যার সকল উপাদান প্রথম দুটি সমাহারের উভয়টিতেই থাকে। ধরা যাক A এবং B দুটি সমাহার দেয়া আছে ঃ

$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{5, 7, 13, 15\}$ এ ক্ষেত্রে A এবং B–এর ছেদনের ফলে উৎপন্ন তৃতীয় সমাহার C–এর বর্ণনা হবে

$C = \{5, 7\}$ এবং সাংকেতিকভাবে লেখা হয়

$A \cap B = C$ (পড়তে হবে, A ছেদন B সমান C)। এছাড়া,

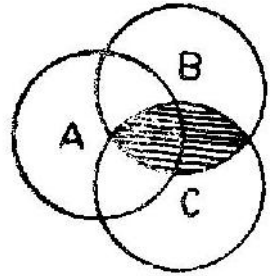
$A \cap B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \in B\}$।

সমাহারের সংখ্যা দুয়ের অধিক (যত বেশিই) হোক না কেন তাদের ছেদনের ফলে উৎপন্ন সমাহারের উপাদানসমূহকে অবশ্যই প্রদত্ত সমাহারসমূহের প্রতিটিতে থাকতে হবে। যেমন,

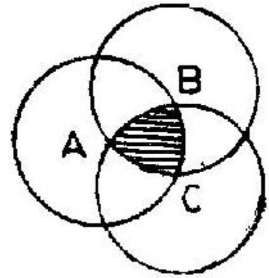
$A \cap B \cap C \cap D = E$ হলে, $E = \{x \mid x \in A, x \in B, x \in C$ এবং $x \in D\}$

চিত্রের মাধ্যমে বিষয়টি নিম্নোক্ত উপায়ে বোঝানো যায় ঃ

ধরা যাক A, B এবং C তিনটি সমাহারকে তিনটি বৃত্ত দ্বারা বোঝানো হয়েছে



[চিত্র ঃ ১]



[চিত্র ঃ ২]

চিত্র–১ B এবং C সমাহারদ্বয়ের ছেদন দেখাচ্ছে এবং চিত্র–২ A, B এবং C-এর ছেদন দেখাচ্ছে। প্রথম চিত্রের ছায়াবৃত (shaded) এলাকাটি হচ্ছে $B \cap C$ সমাহার এবং দ্বিতীয় চিত্রের ছায়াবৃত অংশটি হচ্ছে $A \cap B \cap C$ সমাহার।

যদি দুই বা ততোধিক সমাহার এমন হয় যে তাদের কোন সাধারণ উপাদান নেই তবে সেক্ষেত্রে তাদের ছেদন হবে $\emptyset$, অর্থাৎ শূন্য সমাহার। ছেদন সম্পর্কে আরও কয়েকটি নিয়ম হচ্ছে ঃ

ক. $A \cap B = C$ হলে C A এবং B উভয়েরই উপসমাহার, অর্থাৎ

$C = A \cap B \subseteq A$ এবং $C = A \cap B \subseteq B$

খ. শূন্য সমাহারের সঙ্গে যে কোন সমাহারের ছেদনের ফলে শূন্য সমাহার পাওয়া যায়, অর্থাৎ

$A \cap \emptyset = \emptyset$

গ. কোন সমাহারের সঙ্গে একই সমাহার কিংবা তার সমান কোন সমাহার ছেদ করলে একই সমাহর পাওয়া যায়, অর্থাৎ

$A \cap A = A$

ঘ. A ছেদন B বা B ছেদন A –এর মধ্যে গাণিতিক কোন পার্থক্য নেই, অর্থাৎ

$A \cap B = B \cap A$

ঙ. দুয়ের অধিক সমাহার পরস্পরকে ছেদ করলে সমাহারগুলি আলাদা আলাদাভাবে কোন জুটি বা সমষ্টিকে ছেদনের ক্রম পরিবর্তনে ছেদনের চূড়ান্ত ফল পরিবর্তিত হয় না, অর্থৎ

$A \cap B \cap C \cap D = A \cap (B \cap C \cap D) = (B \cap A) \cap (C \cap D) = (A \cap C \cap D) \cap B$ ইত্যাদি

চ. কোন একটি সমাহার অপর কোন সমাহারের উপসমাহার হলে উপসমাহারটির সঙ্গে মূল সমাহারের ছেদনের ফলে উপসমাহারটিকেই পাওয়া যায়, অর্থাৎ

যদি $A \subseteq B$ হয় তবে $A \cap B = A$

ছ. একটি সমাহার দ্বিতীয় কোন সমাহারের উপসমাহার এবং দ্বিতীয় সমাহারটি তৃতীয় কোন সমাহারের উপসমাহার হলে প্রথম সমাহারটি দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সমাহারের ছেদনের উপসমাহার হবে, অর্থাৎ

$A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ হলে $A \subseteq (B \cap C)$

সমাহারের যোজন (Union of sets)

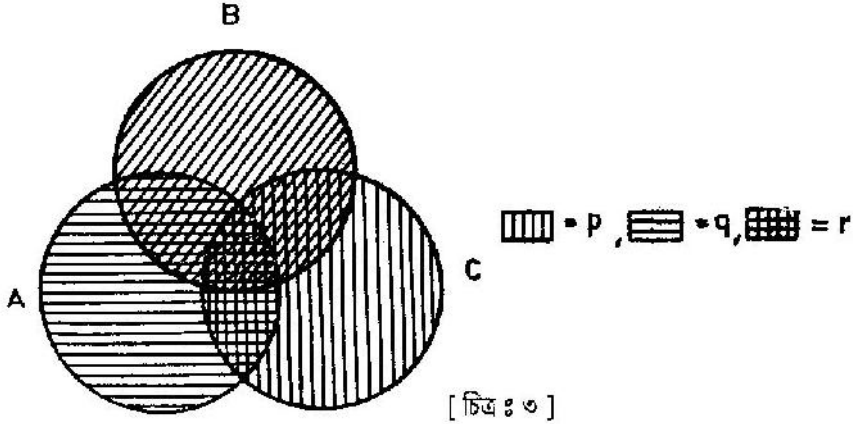
A এবং B দুটি সমাহারের যোজনের ফলে এমন একটি তৃতীয় সমাহার C পাওয়া যায় যার উপাদান A অথবা B এদের যেকোন একটিতে অথবা উভয়টিতেই থাকে। যেমন,

$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ এবং

$B = \{5, 7, 13, 15\}$ হলে

A যোজন B অর্থাৎ $A \cup B = C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

সমাহারের সংখ্যা দুয়ের অধিক হলে তাদের যোজনের ফলে উৎপন্ন সমাহারের উপাদান যোজনে অংশগ্রহণকারী যেকোন সমাহারে, অথবা কয়েকটিতে, অথবা সব কটিতেই থাকবে। নিচে চিত্রের সাহায্যে সমাহারের যোজন দেখানো হল ঃ



[চিত্র ঃ ৩]

A, B এবং C সমাহারের যোজনের ফলে সৃষ্ট নতুন সমাহার হবে চিত্রে যেকোন প্রকার দাগ দ্বারা আবৃত পূরো অংশ। সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করলে,

$A \cup B = \{x | x \in A$ কিংবা $x \in B\}$

$A \cup B \cup C = \{x | x \in A$ কিংবা $x \in B$ কিংবা $x \in C\}$

সমাহারসমূহের যোজনের ক্ষেত্রেও কতিপয় নিয়ম আছে। এখানে সাংকেতিক চিহ্ন দ্বারা সেসব নিয়ম লিপিবদ্ধ করা হল ঃ

ক. $A \cup A = A$

খ. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

গ. $A \cup B = B \cup A$

ঘ. $A \cup \emptyset = A$

ঙ. $A \cup B = \emptyset$ হলে $A = \emptyset$ এবং $B = \emptyset$

চ. $B \subseteq A$ হলে $A \cup B = A$ এবং $A \subseteq B$ হলে $A \cup B = B$

ছ. $A \subseteq (A \cup B)$ হলে $B \subseteq (A \cup B)$

জ. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ এবং

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

সম্পূরক সমাহার (Complement of a set)

কোন সমাহার U যদি অপর কোন সমাহার A–এর জন্য সার্বজনীন সমাহার হয় তবে A সমাহারের সম্পূরক বলতে এমন একটি সমাহারকে বোঝাবে যার উপাদানসমূহ U সমাহারে আছে কিন্তু A সমাহারে নেই। A সমাহারের সম্পূরক সমাহারকে A', A^c, $\overline{A}$ কিংবা ~A ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং

$A' = U - A : A' = \{x | x \in U$ কিন্তু $x \notin A\}$

ধরা যাক, $U = \{1, 2, 3, 7, 9, 10, 12\}$

এবং $A = \{2, 3, 9\}$

সেক্ষেত্রে, $A' = \{1, 7, 10, 12\}$

দুটি সমাহারের প্রভেদ (Difference of two sets)

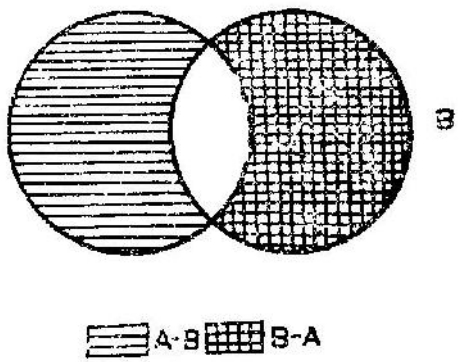
দুটি সমাহার A এবং B–এর প্রভেদকে A–B কিংবা A~B কিন্তু B এবং A–এর প্রভেদকে B–A কিংবা B~A দ্বারা প্রকাশ করা হয়। A–B হবে এমন একটি তৃতীয়

সমাহার যার উপাদানসমূহ A সমাহারে আছে কিন্তু B সমাহারে নেই। পক্ষান্তরে B–A হবে অপর একটি সমাহার যার উপাদানসমূহ B সমাহারে আছে কিন্তু A সমাহারে নেই। সাংকেতিকভাবে,

$A - B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \notin B\}$

$B - A = \{x \mid x \in B$ এবং $x \notin A\}$

লক্ষণীয় যে, $A - B \neq B - A$। চিত্রে প্রকাশ করলে দুটি সমাহারের প্রভেদকে নিম্নোক্ত উপায়ে দেখানো যায় ঃ



[চিত্র ঃ ৪]

ধরা যাক $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 11\}$ এবং

$B = \{2, 4, 5, 9, 10, 11\}$

সেক্ষেত্রে $A - B = \{1, 3, 6, 8\}$ এবং $B - A = \{4, 9, 10\}$

দুটি সমাহারের প্রভেদ সংক্রান্ত উপর্যুক্ত বর্ণনা থেকে সহজেই অনুমেয় যে,

$$(A - B) \subseteq A \text{ এবং } (B - A) \subseteq B$$

সমাহার ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের সুবিধার জন্য এখানে সমাহার সংক্রান্ত আরও কয়েকটি সূত্র উল্লেখ করা হল ঃ

ক. $A \cap A' = \emptyset$ এবং $A \cup A' = U$ যেখানে U হচ্ছে A–এর সার্বজনীন সমাহার।

খ. $U' = \emptyset$ এবং $\emptyset' = U$

গ. $(A')' = A$

ঘ. $A \subset B$ হলে $B' \subset A$

ঙ. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং $(A \cap B)' = A' B'$ *

চ. $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$ এবং $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$

ছ. $A \cup B = (A - B) \cup B$

জ. $A - B = A$ হলে $A \cap B = \emptyset$

ঝ. $A' - B' = B - A$

ঞ. $A - (A - B) = A \cap B$ এবং $B - (A - B) = B \cap A$

ট. $A \cap (B - A) = \emptyset$ এবং $(A - B) \cap B = \emptyset$

ঠ. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ড. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ঢ. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ এবং

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

ণ. $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$

ত. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

সমাহারের উপাদানসংখ্যা

ব্যবহারিক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সবচেয়ে বেশি প্রয়োজন সসীম সমাহারসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক থেকে তাদের বিভিন্নটির উপাদান সংখ্যা নির্ধারণের নিয়ম।

সাধারণভাবে কোন সমাহারকে A দ্বারা চিহ্নিত করলে $n(A)$ দ্বারা A সমাহারের মোট উপাদানসংখ্যা বোঝায়। যেমন, $A = \{2, 5, -4, 8, 1\}$ হলে $n(A) = 5$; $B = \{x | x$ হচ্ছে 1 এবং 12-এর মধ্যে একটি বেজোড় সংখ্যা $\}$ হলে $n(B) = 6$ ইত্যাদি।

অসংলগ্ন সমাহার (Disjoints)

ধরা যাক A এবং B এমন দুটি সমাহার দেয়া আছে যাদের একটির কোন উপাদানই অপরটিতে নেই। এমন দুটি সমাহারকে অসংলগ্ন সমাহার বলে। তাদের ক্ষেত্রে A এবং B সমাহারদ্বয়ের মোট উপাদান সংখ্যা হবে $n(A \cup B)$ এবং

---

* সূত্র দুটি ডি-মর্গানের সূত্র নামে পরিচিত

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \ldots \quad (1)$$

কিন্তু A এবং B সমাহারদ্বয় যদি অসংলগ্ন না হয় অর্থাৎ একটির কতিপয় উপাদান অপরটিতে থাকে তবে সেক্ষেত্রে দুটি সমাহারের মোট উপাদান সংখ্যা হবে

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \ldots \quad (2)$$

অনুরূপভাবে, A, B এবং C তিনটি অসংলগ্ন সমাহার হলে

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \quad \ldots \quad (3)$$

কিন্তু তারা যদি অসংলগ্ন না হয়, তবে

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \ldots \quad (4)$$

অবশ্য উপরের সূত্রসমূহের মধ্যে (2) এবং (4) নং সূত্রদ্বয়ই প্রধান, কেন না অসংলগ্ন সমাহারসমূহের জন্য

$n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ এবং $n(A \cap B \cap C)$ এদের প্রত্যেকেরই মান শূন্য।

কার্তেসীয় পূরণ (Cartesian product)

কতিপয় সমাহারের প্রতিটির একটি উপাদান যদি অপরটির অপর কোন উপাদানের সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে অবস্থান করে তবে সামঞ্জস্যপূর্ণ উপাদানদ্বয়ের দুটিকে শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি (Ordered pair) বলা হয়। শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি তৈরি করে এমন কয়েকটি সমাহারের উদাহরণ

(1, 2) ; (1, 4) কিংবা (1, 2, 3) ; (1, 4, 9) ইত্যাদি।

শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি হিসাবে (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) ইত্যাদিকে দেখানো যায়।

সমতলক্ষেত্রে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য স্থানাংক দেয়া হলে স্থানাংকসমূহকে একেকটি শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি বলা যায়। শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটির সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য হচ্ছে তার উপাদানসমূহের প্রথম ও দ্বিতীয় হিসাবে সুনির্দিষ্ট অবস্থান। স্থানাংক (4, 7) এবং (7, 7) দুটি আলাদা আলাদা বিন্দু নির্দেশ করে, যদিও সমাহার হিসাবে (4, 7) = (7, 4)। শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি (a, b) এবং (c, d) শুধুমাত্র তখনই সমান হয় যখন a = c এবং b = d

A এবং B দুটি সমাহার হলে তাদের কার্তেসীয় পূরণ শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটিসমূহের এমন একটি সমাহার তৈরি করে যার উপাদানস্বরূপ জুটিগুলির প্রথম সদস্য A-তে এবং দ্বিতীয় সদস্য B-তে থাকে।

$A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{4, 5\}$ হলে কার্তেসীয় পূরণ

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$ এবং

$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

সমাহারের উপাদান হিসাবে শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি $(1, 4) \neq (4, 1)$; $(1, 5) \neq (5, 1)$; $(2, 4) \neq (4, 2)$ ইত্যাদি এবং সে কারণে

$$A \times B \neq B \times A$$

কার্তেসীয় পূরণের বৈশিষ্ট্যসমূহ

১. $A \times B$ এবং $B \times A$–এর উপাদান সংখ্যা সমান তবে $A = B$ না হলে $A \times B \neq B \times A$;

২. A এবং B দুটি অসংলগ্ন সমাহার হলে $A \times B$ এবং $B \times A$ উভয়েই অসংলগ্ন সমাহার হবে ;

৩. A–এর উপাদান সংখ্যা m এবং B–এর উপাদানসংখ্যা n হলে $A \times B$ এবং $B \times A$ উভয়েরই উপাদানসংখ্যা হবে $m \times n$

৪. A অথবা B এর যে কোনটি শূন্য সমাহার হলে $A \times B$ একটি শূন্য সমাহার হবে ;

৫. A অথবা B–এর একটি অসীম সমাহার হলে এবং অপরটি শূন্য সমাহার না হলে $A \times B$ একটি অসীম সমাহার হবে।

৩.১ $A = \{1, 4\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{3, 5\}$ হলে

ক. প্রমাণ কর যে, $A \times B \neq B \times A$

খ. $(A \times B) \cap (A \times C)$–এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

ক. $A \times B = \{1, 4\} \times \{2, 3\}$

$= \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3)\}$

$B \times A = \{2, 3\} \times \{1, 4\}$

$= \{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

$\therefore A \times B \neq B \times A$

খ. $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3)\}$

$A \times C = \{(1, 3), (1, 5), (4, 3), (4, 5)\}$

$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 3), (4, 3)\}$

৩.২ $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; $C = \{1, 3, 4\}$ এবং $D = \{2, 4, 5\}$ হলে প্রমাণ কর যে

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

সমাধান ঃ $A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\}$

$= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

$C \times D = \{1, 3, 4\} \times \{2, 4, 5\}$

$= \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 5)\}$

$\therefore (A \times B) \cap (C \times D) = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

আবার, $A \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$

$B \cap D = \{2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2, 4\}$

$\therefore (A \cap C) \times (B \cap D) = \{1, 3\} \times \{2, 4\}$

$= \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

$= (A \times B) \cap (C \times D)$

সমাহারের ব্যবহার

সমাহার তত্ত্ব প্রয়োগের মাধ্যমে বিভিন্ন ব্যবহারিক সমস্যা সমাধান করা যায়। অনেক ক্ষেত্রে ভিন্নভাবে সমাধান করা গেলেও সমাহারের সাহায্যে সমাধানের প্রক্রিয়াকে অনেক সহজ করানো যায়। এখানে কতিপয় উদাহরণ দেয়া হল ঃ

৩.৩ একটি শ্রেণীতে মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা 100। এদের মধ্যে 30 জন্য ক্লাসে বই আনে, 20 জন বই আনে কিন্তু খাতা আনে না। উক্ত শ্রেণীতে বই এবং খাতা দুটোই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা কত? কতজন শুধু খাতা আনে কিন্তু বই আনে না?

সমাধান ঃ ধরা যাক, $n(A)$ = বই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা

$n(B)$ = খাতা আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা

সেক্ষেত্রে বই ও খাতা দুটোই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা হবে $n(A \cap B)$ এবং শুধু বই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা $= n(A) - n(A \cap B)$; প্রদত্ত বর্ণনানুযায়ী, $n(A) = 30$; $n(A) - n(A \cap B) = 20$ এবং $n(A \cup B) = 100$

বই ও খাতা দুটোই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা অর্থাৎ $n(A \cap B)$–এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\begin{aligned} \text{যেহেতু,}\quad n(A) - n(A \cap B) &= 20 \\ \text{বা}\quad 30 - n(A \cap B) &= 20 \\ \therefore\quad n(A \cap B) &= 30 - 20 \\ &= 10 \end{aligned}$$

শুধু খাতা আনে এমন ছাত্রাছাত্রী সংখ্যা জানার পুর্বে খাতা আনে (বই আনতেও পারে, না-ও আনতে পারে) এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা অর্থাৎ $n(B)$–এর মান জানতে হবে।

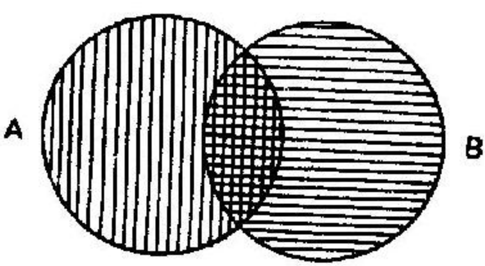
সূত্রানুযায়ী

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \text{বা,}\quad 100 &= 30 + n(B) - 10 \\ \therefore n(B) &= 100 - 30 + 10 \\ &= 80 \end{aligned}$$

এবং শুধু খাতা আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা $= n(B) - n(A \cap B)$

$$\begin{aligned} &= 80 - 10 \\ &= 70 \end{aligned}$$

বিকল্প সমাধান



[চিত্র ঃ ৫]

প্রদত্ত সমস্যাটির দৃশ্যবৎ অনুধাবন এবং দ্রুততর ও সহজতর উপায়ে সমাধানের জন্য উপরের চিত্রটি ব্যবহার করা যায়। চিত্রের A বৃত্তটি যারা বই আনে তাদের সমাহার এবং B বৃত্তটি যারা খাতা আনে তাদের সমাহার হলে সহজেই অনুমেয় যে P অংশটি যারা শুধু বই আনে তাদের সমাহার, q অংশটি যারা শুধু খাতা আনে তাদের সমাহার এবং r অংশটি যারা বই ও খাতা দুটোই আনে তাদের সমাহার প্রকাশ করে।

$n(P) = 20$; $n(A) = 30$ $\therefore$ $n(r) = 30 - 20 = 10$

আবার $n(B) = n(q) + n(r)$ যেখানে $n(B) = 100 - n(A) = 80$

$\therefore$ $80 = n(q) + 10$

বা, $n(q) = 80 - 10$

$= 70$

বর্ণিত পদ্ধতিটি সমাহার সংক্রান্ত অন্যান্য সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা যায় এবং তাতে সমাধানের প্রক্রিয়া সহজ হয় বলে অন্যান্য সমস্যার ক্ষেত্রেও শিক্ষার্থীদের এ পদ্ধতির প্রয়োগ চর্চা করার পরামর্শ দেয়া হল। পদ্ধতিটি অপেক্ষাকৃত সহজ কিন্তু প্রতিবার তাতে চিত্রাঙ্কন প্রয়োজন বলে বর্তমান গ্রন্থে পরবর্তীতে তার পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে শুধু বীজগাণিতিক সমাধান প্রক্রিয়া দেখানো হবে।

৩.৪ 400 জন ছাত্রের মধ্যে সমীক্ষা চালিয়ে দেখা গেল তাদের 102 জন হিসাব বিজ্ঞান পড়ে, 110 জন পড়ে কারবার ব্যবস্থাপনা এবং 152 জন পড়ে বাণিজ্যিক আইন। মোট ছাত্রসংখ্যার 27 জন কারবার ব্যবস্থাপনা ও বাণিজ্যিক আইন দুটোই পড়ে, 36 জন পড়ে হিসাববিজ্ঞান ও বাণিজ্যিক আইন এবং 18 জন পড়ে হিসাববিজ্ঞান ও কারবার ব্যবস্থাপনা। হিসাববিজ্ঞান, কারবার ব্যবস্থাপনা ও বাণিজ্যিক আইন এই তিনটি বিষয়ই পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা 11। কতজন ছাত্র উপর্যুক্ত তিনটি বিষয়ের কোনোটিই পড়ে না? কতজন শুধু একটি বিষয় পড়ে?

সমাধান ঃ ধরা যাক, হিসাববিজ্ঞান পড়া মোট ছাত্রের সংখ্যা $= n(A)$

কারবার ব্যবস্থাপনা পড়া মোট ছাত্রের সংখ্যা $= n(B)$

এবং বাণিজ্যিক আইন পড়া মোট ছাত্রের সংখ্যা $= n(C)$

সেক্ষেত্রে $n(A) = 102$

$n(B) = 110$

$n(C) = 152$

$n(A \cap B) = 18$

$n(A \cap C) = 36$

$n(B \cap C) = 27$

$n(A \cap B \cap C) = 11$

কোন বিষয়ই পড়ে না এমন ছাত্রের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নির্ধারণ করতে হবে কতজন কোন–না–কোন বিষয় পড়ে অর্থাৎ $n(A \cup B \cup C)$ এর মান

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap C)$$

$$- n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 102 + 110 + 152 - 27 - 36 - 18 + 11$$

$$= 294$$

মোট ছাত্রের সংখ্যা 400 $\therefore$ কোন বিষয়ই পড়ে না এমন ছাত্রের সংখ্যা হবে $(400 - 294) = 106$ জন।

শুধু একটি বিষয় পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে দেখা যাক কতজন শুধু হিসাব বিজ্ঞান পড়ে।

শর্তানুযায়ী হিসাব বিজ্ঞান পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা $n(A) = 102$ এদের মধ্যে বিভিন্ন ধরণের ছাত্র আছে ঃ

ক. যারা শুধু হিসাব বিজ্ঞান পড়ে অর্থাৎ $n(A')$

খ. যারা হিসাব বিজ্ঞান ও কারবার ব্যবস্থাপনা দুটোই পড়ে অর্থাৎ $n(A \cap B)$

গ. যারা হিসাববিজ্ঞান ও বাণিজ্যিক আইন দুটোই পড়ে অর্থাৎ $n(A \cap C)$

ঘ. যারা হিসাববিজ্ঞান, কারবার ব্যবস্থাপনা ও বাণিজ্যিক আইন তিনটি পড়ে অর্থাৎ $n(A \cap B \cap C)$

এখন শুধু হিসাববিজ্ঞান পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা নির্ণয় করতে হলে সূত্রটি হবে

$$n(A') = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(চিত্রাঙ্কন করে সূত্রটির সত্যতা যাচাই কর)

$$= 102 - 18 - 36 + 11$$

$$= 59$$

অনুরূপভাবে শুধু কারবার ব্যবস্থাপনা পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা হবে

$$n(B') = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 110 - 18 - 27 + 11$$

$$= 76$$

মাস	মোট ক্রেতার মধ্যে পণ্যটি ক্রয়কারীর সংখ্যার শতকরা হার
মার্চ	62
জানুয়ারি এবং ফেব্রুয়ারি	35
ফেব্রুয়ারি এবং মার্চ	33
জানুয়ারি এবং মার্চ	31
জানুয়ারি, ফেব্রুয়ারি এবং মার্চ	22

কিন্তু তথ্যগুলি প্রতিবেদনে ব্যবহার করা গেল না। এর কারণ কি?

সমাধান ঃ প্রাপ্ত তথ্যাবলীর যথার্থতা যাচাই করা যাক। যেহেতু তথ্যগুলি ক্রেতাদের শতকরা অংশ হিসাবে দেখানো হয়েছে। মোট ক্রেতার সংখ্যা হবে 100. জানুয়ারি ফেব্রুয়ারি, এবং মার্চ ক্রেতাদের সংখ্যা যথাক্রমে $n(A)$, $n(B)$ এবং $n(C)$ ধরে নিলে

$$n(A \cup B \cup C) = 100$$

এবং $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$

$$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 59 + 62 + 62 - 35 - 31 - 33 + 22$$

$$= 106 \neq 100$$

দেখা যাচ্ছে তথ্যগুলিতে অসঙ্গতি রয়ে গেছে। অতএব ত্রুটি নির্ধারণের পর তা সংশোধন না করে তথ্যগুলির ব্যবহার যুক্তিযুক্ত নয়।

২.৭ আসবাবপত্র ক্রেতার একটি সমীক্ষার মোট 80 জন ক্রেতার মধ্যে পর্যবেক্ষণ চালান হয়। দেখা গেল একটি করে সোফাসেট, খাট ও আলমিরা কিনতে চায় এমন ক্রেতার সংখ্যা যথাক্রমে 15, 20 এবং 25। একটি সোফা ও একটি খাট কিনতে চায় 5 জন, একটি খাট ও একটি আলমিরা কিনতে চায় 10 জন এবং একটি সোফা সেট ও একটি আলমিরা কিনতে চায় 6 জন। তিন ধরনের আসবাবপত্রের প্রতিটির একটি করে কিনতে চায় মাত্র 2 জন। নির্ধারণ করতে হবে

ক. কতজন কেবলমাত্র সোফা সেট কিনতে চায়?

খ. কতজন কেবলমাত্র খাট কিনতে চায়?

গ. কতজন কেবল আলমিরা কিনতে চায়?

ঘ. কতজন সোফাসেট কিনবেই কিন্তু খাট কিনবে না?

ঙ. কতজন সোফাসেট কিনবেই কিন্তু আলমিরা কিনবে না?

চ. কতজন খাট কিনবেই কিন্তু সোফা কিনবে না?

$$= \frac{x^c + 1 + x^{-a}}{x^{-a} + 1 + x^c} = 1$$

করণী (Surd)

করণী অমূলদ সংখ্যাসমূহের একটি বিশেষ প্রকরণ। কোন মূলদ সংখ্যার মূল যদি অমূলদ হয় তবে এই মূলকে করণী বলে। অর্থাৎ কোন সংখ্যা করণী হলে তার দুটি বৈশিষ্ট্য থাকবে।

১. সংখ্যাটি অমূলদ হবে এবং
২. তা একটি মূলদ সংখ্যার মূল হবে।

$\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{16}$ একেকটি করণী। কিন্তু $\sqrt[3]{8}$ বা $\sqrt{16}$ করণী নয় যেহেতু $\sqrt[3]{8} = 2$ এবং $\sqrt{16} = 4$ উভয়েই মূলদ সংখ্যা। আবার $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ করণী নয় কেননা $2 + \sqrt{2}$ অমূলদ।

সাধারণভাবে, যদি a একটি মূলদ সংখ্যা হয় এবং p ও q দুটি পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে $\sqrt[n]{a} \neq \frac{p}{q}$ হলে $\sqrt[n]{a}$ একটি করণী। এখানে n-কে করণীর শৃঙ্খলা (order) বলে। করণীর শৃঙ্খলা 2 হলে তাকে বর্গ করণী (quadratic surd), 3 হলে ঘন করণী (cubic surd) এবং 4 হলে দ্বিবর্গ করণী (biquadratic surd) বলে।

কোন করণীতে সহগ (co-efficient) থাকতেও পারে, নাও থাকতে পারে যেমন $\sqrt[3]{4}$, $\frac{3}{5}\sqrt{7}$ ইত্যাদি। তবে যদি করণীতে সহগ না থাকে তবে ধরে নেয়া হয় তার সহগের মান ± 1 এবং সহগবিহীন করণীকে সমগ্র করণী (entire surd) বলে। পক্ষান্তরে সসহগ করণীকে মিশ্র করণী (mixed surd) বলে। মিশ্র করণীর সহগও ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক উভয় প্রকার হতে পারে। যেমন, $\sqrt[3]{4}$ একটি সমগ্র করণী এবং $-2\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}\sqrt[5]{7}$, $4\sqrt{11}$ একেকটি মিশ্র করণী। মিশ্র করণীকে সহজেই সমগ্র করণীতে রূপান্তরিত করা যায়। যেমন,

$$-2\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3.6} = -\sqrt[3]{8.6} = -\sqrt[3]{48}$$

কোন করণী $\sqrt[n]{a}$-এর a যদি মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা না হয় তবে তাকে মৌলিক অখণ্ড সংখ্যায় ভেঙে দেখানো যায়। যেমন,

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

করণীর সূত্রসমূহ

১. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $p.\sqrt[n]{a} \times q\sqrt[n]{b} = pq\sqrt[n]{ab}$

২. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $p\sqrt[n]{a} \div q\sqrt[n]{b} = \dfrac{p}{q}\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

৩. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

৪. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$

৫. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

করণীর যোজন, বিয়োজন, পূরণ ও বিভাজন

দুই বা ততোধিক করণীকে সহজভাবে প্রকাশের পর যদি দেখা যায় যে তারা একই মৌলিক করণী দ্বারা গঠিত তবে তাদের সমজাতীয় করণী (similar surd) বলে। বলা বাহুল্য, সমজাতীয় করণীসমূহের শৃঙ্খলাও একই। উদাহরণের মাধ্যমে সমজাতীয় করণীর যোজন ও বিয়োজন দেখানো হল ;

২.১২ $\sqrt{75} + \sqrt{27}$
$$= \sqrt{25.3} + \sqrt{9.3}$$
$$= \sqrt{5^2.3} + \sqrt{3^2.3}$$
$$= 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$$
$$= 8\sqrt{3}$$

২.১৩ $2\sqrt{128} - \sqrt{162}$
$$= 2\sqrt{64.2} - \sqrt{81.2}$$
$$= 2\sqrt{64}\sqrt{2} - \sqrt{81}\sqrt{2}$$
$$= 2.8\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$
$$= 16\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$
$$= 7\sqrt{2}$$

$$= \frac{x^c + 1 + x^{-a}}{x^{-a} + 1 + x^c} = 1$$

করণী (Surd)

করণী অমূলদ সংখ্যাসমূহের একটি বিশেষ প্রকরণ। কোন মূলদ সংখ্যার মূল যদি অমূলদ হয় তবে এই মূলকে করণী বলে। অর্থাৎ কোন সংখ্যা করণী হলে তার দুটি বৈশিষ্ট্য থাকবে।

১. সংখ্যাটি অমূলদ হবে এবং
২. তা একটি মূলদ সংখ্যার মূল হবে।

$\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{16}$ একেকটি করণী। কিন্তু $\sqrt[3]{8}$ বা $\sqrt{16}$ করণী নয় যেহেতু $\sqrt[3]{8} = 2$ এবং $\sqrt{16} = 4$ উভয়েই মূলদ সংখ্যা। আবার $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ করণী নয় কেননা $2 + \sqrt{2}$ অমূলদ।

সাধারণভাবে, যদি a একটি মূলদ সংখ্যা হয় এবং p ও q দুটি পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে $\sqrt[n]{a} \neq \frac{p}{q}$ হলে $\sqrt[n]{a}$ একটি করণী। এখানে n-কে করণীর শৃঙ্খলা (order) বলে। করণীর শৃঙ্খলা 2 হলে তাকে বর্গ করণী (quadratic surd), 3 হলে ঘন করণী (cubic surd) এবং 4 হলে দ্বিবর্গ করণী (biquadratic surd) বলে।

কোন করণীতে সহগ (co-efficient) থাকতেও পারে, নাও থাকতে পারে যেমন $\sqrt[3]{4}$, $\frac{3}{5}\sqrt{7}$ ইত্যাদি। তবে যদি করণীতে সহগ না থাকে তবে ধরে নেয়া হয় তার সহগের মান ± 1 এবং সহগবিহীন করণীকে সমগ্র করণী (entire surd) বলে। পক্ষান্তরে সসহগ করণীকে মিশ্র করণী (mixed surd) বলে। মিশ্র করণীর সহগও ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক উভয় প্রকার হতে পারে। যেমন, $\sqrt[3]{4}$ একটি সমগ্র করণী এবং $-2\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}\sqrt[5]{7}$, $4\sqrt{11}$ একেকটি মিশ্র করণী। মিশ্র করণীকে সহজেই সমগ্র করণীতে রূপান্তরিত করা যায়। যেমন,

$$-2\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{2^3.6} = -\sqrt[3]{8.6} = -\sqrt[3]{48}$$

কোন করণী $\sqrt[n]{a}$-এর a যদি মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা না হয় তবে তাকে মৌলিক অখণ্ড সংখ্যায় ভেঙে দেখানো যায়। যেমন,

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

করণীর সূত্রসমূহ

১. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\quad p.\sqrt[n]{a} \times q\sqrt[n]{b} = pq\sqrt[n]{ab}$

২. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\quad p\sqrt[n]{a} \div q\sqrt[n]{b} = \dfrac{p}{q}\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

৩. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

৪. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$

৫. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

করণীর যোজন, বিয়োজন, পূরণ ও বিভাজন

দুই বা ততোধিক করণীকে সহজভাবে প্রকাশের পর যদি দেখা যায় যে তারা একই মৌলিক করণী দ্বারা গঠিত তবে তাদের সমজাতীয় করণী (similar surd) বলে। বলা বাহুল্য, সমজাতীয় করণীসমূহের শৃঙ্খলাও একই। উদাহরণের মাধ্যমে সমজাতীয় করণীর যোজন ও বিয়োজন দেখানো হল ;

২.১২ $\sqrt{75} + \sqrt{27}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{25.3} + \sqrt{9.3} \\ &= \sqrt{5^2.3} + \sqrt{3^2.3} \\ &= 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

২.১৩ $2\sqrt{128} - \sqrt{162}$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{64.2} - \sqrt{81.2} \\ &= 2\sqrt{64}\sqrt{2} - \sqrt{81}\sqrt{2} \\ &= 2.8\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \\ &= 16\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

২.১৪ $$2\sqrt{180} - 7\sqrt{20} + 10\sqrt{45} = 2\sqrt{36.5} - 7\sqrt{4.5} + 10\sqrt{9.5}$$
$$= 2.6\sqrt{5} - 7.2\sqrt{5} + 10.3\sqrt{5}$$
$$= 12\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 30\sqrt{5}$$
$$= 28\sqrt{5}$$

করণীসমূহের পূরণ ও বিভাজনের জন্য তাদের শৃঙ্খলা একই হতে হবে।

২.১৫ $$6\sqrt[3]{4} \times 3\sqrt[3]{2} = 6 \times 3 \times \sqrt[3]{4.2}$$
$$= 18\sqrt[3]{8}$$
$$= 18.2$$
$$= 36$$

২.১৬ $$6\sqrt[3]{4} \div 3\sqrt[3]{2} = \frac{6\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{6}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{2}} = 2\sqrt[3]{2}$$

২.১৭ $$(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$
$$= \sqrt{5}.\sqrt{3} - \sqrt{3}.\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{3} + \sqrt{5}.\sqrt{2} - \sqrt{3}.\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{15} - 3 + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{1}$$
$$= \sqrt{15} - 3 + \sqrt{\frac{3.2}{2.2}} + \sqrt{10} - \sqrt{6} + 1$$
$$= \sqrt{15} + \sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{6} - 2$$
$$= \sqrt{15} + \sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{6} - 2$$

করণীর মূলদকরণ (Rationalization of surd)

দুটি করণীকে পূরণ করলে যদি গুণফল একটি মূলদসংখ্যা হয় তবে পূরণের এই প্রক্রিয়াকে করণীর মূলদকরণ বলা হয়। এবং করণীদ্বয়ের একটিকে অপরটির মূলদকারী গুণক (rationalizing factor) বলে।

$\sqrt{3}$–এর জন্য মূলদকারী গুণক $\sqrt{3}$ কেননা $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ একটি মূলদ সংখ্যা। আবার

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ কে মূলদকরণের জন্য $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ দ্বারা পূরণ করতে হবে এবং
$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
এক্ষেত্রে $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ এর মূলদকারী গুণক হচ্ছে $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

২.১৮ হর অংশকে মূলদ সংখ্যায় প্রকাশ কর ঃ $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

সমাধান ঃ

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}^2)}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}.2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6}}{4}$$

২.১৯ $\sqrt{6} = 2.45$ হলে $\dfrac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{48} + \sqrt{18}}$ –এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\dfrac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{48} + \sqrt{18}} = \dfrac{(7\sqrt{3} - 5\sqrt{2})(\sqrt{48} - \sqrt{18})}{(\sqrt{48} + \sqrt{18})(\sqrt{48} - \sqrt{18})}$

$$= \frac{\sqrt{48}\,(7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) - \sqrt{18}(7\sqrt{3} - 5\sqrt{2})}{48 - 18}$$

$$= \frac{7\sqrt{3.48} - 5\sqrt{2.48} - 7\sqrt{3.18} + 5\sqrt{2.18}}{30}$$

$$= \frac{7\sqrt{3.3.16} - 5\sqrt{2.3.16} - 7\sqrt{3.2.9} + 5\sqrt{2.2.9}}{30}$$

$$= \frac{7.3.4 - 5.4\sqrt{6} - 7.3\sqrt{6} + 30}{30}$$

$$= \frac{114 - 41\sqrt{6}}{30}$$

$$= \frac{114 - 41.(2.45)}{30} \qquad (\because \sqrt{6} = 2.45)$$

$$= \frac{114 - 100.45}{30}$$

$$= 0.4516$$

২.২০ $x = \dfrac{2\sqrt{24}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ হলে $\dfrac{x + \sqrt{8}}{x - \sqrt{8}} + \dfrac{x + \sqrt{12}}{x - \sqrt{12}}$ এর মান কত?

সমাধান :

$$x = \frac{x\sqrt{24}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{24}\,(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})\,(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{48} - 2\sqrt{72}}{2 - 3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3.16} - 2\sqrt{2.36}}{-1}$$

$$= \frac{2.4\sqrt{3} - 2.6\sqrt{2}}{-1}$$

$$= \frac{8\sqrt{3} - 12\sqrt{2}}{-1}$$

$$= 12\sqrt{2} - 8\sqrt{3}$$

এখন, $\dfrac{x + \sqrt{8}}{x - \sqrt{8}} = \dfrac{x + 2\sqrt{2}}{x - 2\sqrt{2}}$

$$= \frac{12\sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{12\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} \quad (\because x = 12\sqrt{2} - 8\sqrt{3})$$

$$= \frac{14\sqrt{2} - 8\sqrt{3}}{10\sqrt{2} - 8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{7\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(7\sqrt{2} - 4\sqrt{3})(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})}{(5\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{35.2 + 28\sqrt{6} - 20\sqrt{6} - 16.3}{25.2 - 16.3}$$

$$= \frac{22 + 8\sqrt{6}}{2}$$

$$= 11 + 4\sqrt{6}$$

অনুরূপভাবে নির্ণয় কর যে $\dfrac{x + \sqrt{12}}{x - \sqrt{12}} = -9 - 4\sqrt{6}$

এবং $\dfrac{x + \sqrt{8}}{x - \sqrt{8}} + \dfrac{x + \sqrt{12}}{x - \sqrt{12}} = 11 + 4\sqrt{6} - 9 - 4\sqrt{6}$

$$= 2$$

২.২১ $\dfrac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{5}-3i} = a + bi$ হলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $$\frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{5}-3i} = \frac{(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{5}+3i)}{(\sqrt{5}-3i)(\sqrt{5}+3i)}$$

$$= \frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}i+2\sqrt{5}i+6i^2}{(\sqrt{5})^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}i+2\sqrt{5}i+6.(-1)}{5-9.(-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{15}-6+i(3\sqrt{3}+2\sqrt{5})}{5+9}$$

$$= \frac{\sqrt{15}-6}{14} + i.\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{14}$$

$$= a + bi$$

এখান থেকে $a = \dfrac{\sqrt{15}-6}{14}$ এবং $b = \dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{14}$

২.২২ $x = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\left(x - \dfrac{\sqrt{126}}{\sqrt{42}}\right) \times \left(x - \dfrac{1}{x - 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $$x = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \left(x - \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{42}}\right)\left(x - \frac{1}{x - 2\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{42}}\right) \times$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{126}{42}}\right) \times$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{4-2}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= \left(\frac{4-3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{8-3}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{5}{6}$$

২.২৩ $x = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

সমাধান ঃ $x = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ $\therefore \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{5-\sqrt{21}} = \dfrac{2(5+\sqrt{21})}{(5-\sqrt{21})(5+\sqrt{21})}$

$$= \frac{10 + 2\sqrt{21}}{25-21}$$

$$= \frac{10+2\sqrt{21}}{4} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5-\sqrt{21}}{2} + \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$= \frac{5-\sqrt{21}+5+\sqrt{21}}{2} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$= 5^2 - 2$$

$$= 23$$

এবং $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= 5^3 - 3.5$$

$$= 110$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 110 - 5.23 + 5$$

$$= 100 - 115 + 5$$

$= 0$ প্রমাণিত।

মিশ্র করণীর বৈশিষ্ট্য ঃ

১. $a + \sqrt{b} = 0$ হবে শুধুমাত্র তখনই যখন $a = b = 0$

২. $a + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ হলে $a = 0$ এবং $b = c$

৩. $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ হলে $a = c$ এবং $b = d$

৪. $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ হলে
$a - \sqrt{b} = \pm(\sqrt{c} - \sqrt{d})$

২.২৪ $\frac{1 + \sqrt{48}}{5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{72} - \sqrt{108} + \sqrt{8} + 2} = a + b\sqrt{3}$ হলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{1 + \sqrt{48}}{5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{72} - \sqrt{108} + \sqrt{8} + 2}$

$$= \frac{1 + 4\sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2}$$

$$= \frac{1 + 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 4.3}{4 - 3}$$

$$= 14 + 9\sqrt{3}$$

যেহেতু $14 + 9\sqrt{3} = a + b\sqrt{3}$, $a = 14$ এবং $b = 9$

২.২৫ $\frac{1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{3}} = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$ হলে a, b, c এবং d এর মান কত?

সমাধান ঃ $$\frac{1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{5} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 3}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{5} - \sqrt{3})(3 - 2\sqrt{5})}{(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2.5 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{9 - 4.5}$$

$$= \frac{-7 + \sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{-11}$$

$$= \frac{7}{11} - \frac{1}{11}\sqrt{5} + \frac{3}{11}\sqrt{3} - \frac{2}{11}\sqrt{15}$$

যেহেতু $\frac{7}{11} - \frac{1}{11}\sqrt{5} + \frac{3}{11}\sqrt{3} - \frac{2}{11}\sqrt{15}$

$$= a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$$

$a = \frac{7}{11}$, $b = \frac{3}{11}$, $c = -\frac{1}{11}$ এবং $d = -\frac{2}{11}$

মিশ্র করণীর বর্গমূল নির্ণয়

$a + \sqrt{b}$ মিশ্র করণীর বর্গমূল $= \sqrt{a + \sqrt{b}}$

ধরা যাক $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ এর উভয় পক্ষকে বর্গ করলে,

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

এখান থেকে

$$x + y = a \quad \ldots (1)$$

এবং $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$

বা, $4xy = b \quad \ldots (2)$

আবার,

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

$$= a^2 - b$$

$$\therefore x - y = \pm\sqrt{a^2 - b} \quad \ldots (3)$$

ধনাত্মক মান নিলে $x - y = \sqrt{a^2 - b}$

এবং

$$x + y = a$$

$x - y = \sqrt{a^2 - b}$ দুটি সমীকরণ থেকে $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b}$

$$y = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b}$$

এভাবে

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$$

লক্ষণীয় যে (3) নং সমীকরণ থেকে $x-y=-\sqrt{a^2-b}$ নিলে

$$x=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b}) \text{ এবং } y=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$$

এবং তাতে $\sqrt{a+\sqrt{b}}$–এর মান অপরিবর্তিত থাকবে।

২.২৬ $3+\sqrt{5}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

উভয় পাশকে বর্গ করলে $3+\sqrt{5}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore$ $x+y=3$ এবং $4xy=5$

আবার, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$$=3^2-5$$

$$=4$$

$$\therefore x-y=2$$

এখন, $x+y=3$ এবং $x-y=2$ সমীকরণদ্বয় থেকে

$x=\frac{5}{2}$ এবং $y=\frac{1}{2}$

$$\therefore \sqrt{3+\sqrt{5}}=\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)$$

২.২৭ $\sqrt{6+8i}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক $\sqrt{6+8i} = a + ib$, যেখান থেকে

$$6 + 8i = a^2 - b^2 + 2iab$$

$\therefore a^2 - b^2 = 6$ এবং $ab = 4$ $(\because 2iab = 8i)$

আবার $ab = 4$ হলে $b = \frac{4}{a}$ $\therefore b^2 = \frac{16}{a^2}$

এখন $a^2 - b^2 = 6$

বা, $a^2 - \frac{16}{a^2} = 6$

বা, $a^4 - 16 = 6a^2$

বা, $a^4 - 6a^2 - 16 = 0$

বা, $(a^2 - 8)(a^2 + 2) = 0$ $\Rightarrow a^2 - 8 = 0$

$\therefore a^2 = 8$

অথবা $a^2 + 2 = 0$

$\therefore a^2 = -2$

কিন্তু $a^2 = -2$ হতে পারে না ($\because$ a একটি বাস্তব সংখ্যা ; তাই $a^2 = 8$ $\therefore a = \sqrt{8}$

এবং $b^2 = \frac{16}{a^2} = \frac{16}{8} = 2$ $\therefore b = \sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{6+8i} = \sqrt{8} + i\sqrt{2}$

অনুশীলনী — ২

১. নিচের বিবৃতিসমূহ সঠিক কি না যুক্তিসহ দেখাও ঃ

ক. $a^m = a^n \Rightarrow m = n$

খ. $a^m = b^m \Rightarrow a = b$

গ. $3^{2^3} = (3^2)^3$

ঘ. $p > q \rightarrow p^3 > q^3$

ঙ. $p > q \rightarrow p^{-1} > q^{-1}$

২. সহজরূপে প্রকাশ কর :

ক. $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^8$; খ. $\dfrac{\sqrt[3]{(343)^{-2}}}{\sqrt[5]{(32)^{3}}}$;

গ. $\dfrac{a^{\frac{6}{7}} \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[8]{a^{-3}} \cdot \sqrt[5]{a^8 b^5}} \cdot \dfrac{b^2}{a^{\frac{3}{8}}}$ ঘ. $\dfrac{5^{2x+3} \cdot 10^{4x+1}}{25^{3x+2} \cdot 16^{x-\frac{1}{2}}}$;

ঙ. $\left(\dfrac{p^z}{p^y}\right)^{x+y} \times \left(\dfrac{p^y}{p^z}\right)^{y+z} \div 3\,(p^x p^z)^{x-z}$

৩. প্রমাণ কর যে

ক. $$\left\{ \frac{9^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3 \cdot 3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}} \right\}^{\frac{1}{n}} = 27$$

খ. $$\sqrt[m+n]{\frac{x^{m^2}}{x^{n^2}}} \times \sqrt[m+p]{\frac{x^{n^2}}{x^{p^2}}} \times \sqrt[p+m]{\frac{x^{p^2}}{x^{m^2}}} - 1$$

গ. $$\left(x^{\frac{1}{a-b}}\right)^{\frac{1}{a-c}} \times \left(x^{\frac{1}{b-c}}\right)^{\frac{1}{b-a}} \times \left(x^{\frac{1}{c-a}}\right)^{\frac{1}{c-b}} = 1$$

৪. $a = b^c$, $b = c^a$ এবং $c = a^b$ হলে দেখাও যে $abc = 1$

৫. $x = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ হলে দেখাও যে $x^3 + 3x = 2$

৬. $2^x = 4^y = 8^z$ এবং $xyz = 288$ হলে দেখাও যে

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{8z} = \frac{11}{96}$$

৭. $x = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}$ হলে দেখাও যে, $3x^3 - 9x = 10$

৮. $a^x = \left(\frac{a}{k}\right)^y = k^m$ হলে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{m}$

৯. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{1 + x^{a-b} + x^{a-c}} + \frac{1}{1 + x^{b-c} + x^{b-a}} + \frac{1}{1 + x^{c-a} + x^{c-b}} = 1$$

$$\left[\text{সংকেত ঃ } \frac{1}{1 + x^{a-b} + x^{a-c}} = \frac{x^{-a}}{x^{-a}(1 + x^{a-b} + x^{a-c})} = \frac{x^{-a}}{x^{-a} + x^{-b} + x^{-c}} \right]$$

১০. নিচের কোনটি করণী এবং কোনটি করণী নয় নির্ণয় কর ঃ

ক. $\sqrt[3]{64}$ খ. $\sqrt{\frac{4}{121}}$ গ. $\sqrt[5]{243}$ ঘ. $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ ঙ. $\sqrt[5]{64}$

১১. সহজরূপে প্রকাশ কর ঃ

ক. $3\sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

খ. $2\sqrt{18} + \sqrt{20} - \sqrt{147} + \frac{1}{2}\sqrt{50} + \frac{4}{3}\sqrt{45}$

গ. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

ঘ. $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{7 - 3\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

১২. $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ এবং $y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ হলে

$3x^2 - 5xy + 3y^2$এর মান নির্ণয় কর।

১৩. $\sqrt{3} = 1.732$ এবং $\sqrt{5} = 2.236$ হলে $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4+\sqrt{15}}$ এর মান কত?

১৪. $x = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে
$\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1}$ –এর মান কত?

১৫. $2\sqrt{54} + 5\sqrt{294} + \dfrac{19}{30}\sqrt{6} - \sqrt{\dfrac{27}{50}} - \dfrac{2}{3} = a\sqrt{6}$ হলে a-এর মান কত?

১৬. $x = 3+\sqrt{8}$ হলে মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$

খ. $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

গ. $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

১৭. $x = 3+2\sqrt{2},\ y = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ হলে $5x^2 + 10xy + 5y^2$ –এর মান কত?

১৮. বর্গমূল নির্ণয় কর ঃ

ক. $19 - 8\sqrt{3}$

খ. $\sqrt{32} - \sqrt{24}$

গ. $6(5+2\sqrt{6}$

১৯. মান নির্ণয় কর ঃ $\dfrac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}$

তৃতীয় অধ্যায়

সমাহার তত্ত্ব
[SET THEORY]

নির্দিষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত পৃথক পৃথক বস্তুর নির্দিষ্ট সমষ্টিকে সমাহার (set) বলে। যেমন ঃ

ক. 200 এবং 300 এর মধ্যবর্তী সকল বেজোড় (odd) সংখ্যা ;

খ. ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের প্রথম বর্ষের সকল ছাত্রছাত্রী ;

গ. বাংলাদেশে বাংলা ভাষায় প্রকাশিত সকল দৈনিক পত্রিকা ইত্যাদি। প্রদত্ত সংজ্ঞা ও উদাহরণ থেকে সমাহারের দুটি বৈশিষ্ট্য লক্ষণীয় ঃ

— সমাহারকে নির্দিষ্টভাবে নির্ধারিত হতে হবে এবং

— সমাহারের বস্তু (objects) বা উপাদান (elements) সম্পর্কে স্পষ্ট বর্ণনা থাকতে হবে।

সমাহারের উপাদান বলতে কোনো সমাহার যে সকল বস্তু দ্বারা গঠিত তাদেরকেই বোঝায়। উপরের ক. উদাহরণে বর্ণিত সমাহারের উপাদান হচ্ছে 101, 103, 105, ..., 299 কিংবা খ. উদাহরণে বর্ণিত সমাহারের উপাদান হবে ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের প্রথম বর্ষে অধ্যয়নরত একেকজন ছাত্র বা ছাত্রী।

সমাহার বা তার উপাদানসমূহকে গাণিতিকভাবে লেখার একটি নির্দিষ্ট রীতি আছে। কোন সমাহারের নাম A হলে এবং তার উপাদানকে x দ্বারা চিহ্নিত করলে লেখা হয়

$x \in A$ অর্থাৎ x A–এর অন্তর্ভুক্ত।

আবার কোন উপাদান r কোন সমাহার B–এর অন্তর্ভুক্ত না হলে লেখা হয়

$r \notin B$ অর্থাৎ r B এর অন্তর্ভুক্ত নয়।

সমাহারকে বর্ণনার যেসব রীতি প্রচলিত সেগুলিকে মোটামুটি দুভাগে বিভক্ত করা যায় ঃ ক. তালিকা পদ্ধতি (tabular method) এবং খ. বাছাই পদ্ধতি (selector method)। প্রথমোক্ত পদ্ধতিতে সমাহারের সবকটি উপাদানকে উল্লেখ করে তার বর্ণনা দেয়া হয়। যেমন, 1 থেকে 10 পর্যন্ত সকল জোড় (even) সংখ্যার সমাহার $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

বাছাই পদ্ধতিতে সমাহারের বর্ণনা দেয়ার ক্ষেত্রে সব উপাদানের তালিকা না দিয়ে তাদের প্রধান বৈশিষ্ট্য চিহ্নিত করে দেয়া হয়। এ পদ্ধতিতে উপরের X সমাহারকে লেখা হবে ঃ

$X = \{x|$ x হচ্ছে 1 থেকে 10 পর্যন্ত সকল জোড় সংখ্যা$\}$

সমাহারের শ্রেণীকরণ

সমাহার বিভিন্ন প্রকার হতে পারে। শ্রেণীকরণের ভিত্তি অনুযায়ী তাদের নির্দিষ্ট নাম রয়েছে। এসবের মধ্যে কয়েকটি হচ্ছে সসীম সমাহার (finite set), অসীম সমাহার (infinite set), একক সমাহার (unit set), শূন্য সমাহার (empty set, null or void set) ইত্যাদি। নিচে প্রতিটির সংজ্ঞা ও উদাহরণ দেয়া হল।

সসীম সমাহার

যে সকল সমাহারের উপাদান সংখ্যা সীমিত অর্থাৎ সব কটি উপাদান গণনা করে নির্ধারণ করা যায় তাদের সসীম সমাহার বলে। যেমন

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

$B = \{x|$ x বছরের একটি মাস$\}$;

$C = \{x|$ 1 থেকে 10000000 পর্যন্ত 3 দ্বারা বিভাজ্য সকল বেজোড় সংখ্যা ইত্যাদি

কোন সমাহারের উপাদানের সংখ্যা যত বড়ই হোক তা গণনার মধ্যে পড়লে অর্থাৎ কোনভাবে তাদের সংখ্যাসীমা নির্ধারিত থাকলে সমাহারটি সসীম হবে। বছরের কোন নির্দিষ্ট দিনের বিশেষ মুহূর্তে বাংলাদেশে মোট নারী ও পুরুষ (শিশুসহ) মানুষের সংখ্যা গণনার ফল ভ্রান্তিপূর্ণ হতে পারে কিন্তু এই সংখ্যা অসীম নয়, তাই তাদের সমাহারও সসীম হবে।

অসীম সমাহার

যে সকল সমাহারের উপাদানসমূহ কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যাসীমা দ্বারা নির্ধারিত নয় তাদের অসীম সমাহার বলে। যেমন,

$A = \{1, 2, 3. 4, \ldots\ldots\}$;

$B = \{x|$ x একটি জোড় সংখ্যা$\}$;

$C = \{x|$ x তিন দ্বারা বিভাজ্য একটি সংখ্যা$\}$ ইত্যাদি।

একক সমাহার

কোন সমাহারের উপাদান সংখ্যা মাত্র একটি হলে তাকে একক সমাহার বলে। একক সমাহারকে অনেক সময় এক উপাদানের সমাহারও (Singleton) বলা হয়।

$A = \{a\}$ একক সমাহারের একটি উদাহরণ। এমনি আরও উদাহরণ হতে পারে।

$A = \{x \mid x$ 20 এবং 30 এর মধ্যবর্তী একটি যথার্থ বর্গ সংখ্যা $\}$;

$B = \{x \mid x$ মনুষ্যবসতিপূর্ণ একটি গ্রহ$\}$ ইত্যাদি।

শূন্য সমাহার

উপাদানহীন সমাহারকে শূন্য সমাহার বলা হয়। যেমন,

$A = \{x \mid x$ 50 এবং 60 এর মধ্যবর্তী একটি যথার্থ বর্গ সংখ্যা$\}$;

$B = \{x \mid x$ পাঁচ মাথাবিশিষ্ট জীবন্ত সকল মানুষ $\}$ ইত্যাদি।

শূন্য সমাহারকে লেখার জন্য $\emptyset$ (phi) অক্ষর ব্যবহার করা হয় এবং উপরের উদাহরণদ্বয়ের ক্ষেত্রে $A = \emptyset$ এবং $B = \emptyset$.

সমাহারসমূহের সমতা (Equality) **ও সমতুল্যতা** (Equivalence)

A এবং B দুটি আলাদা সমাহার একে অপরের সমান হতে পারে ঠিক তখনই যখন তাদের একটির প্রতিটি উপাদান অপরটির প্রতিটি উপাদানের সমান। বলার অপেক্ষা রাখে না যে দুটি সমাহার সমান হলে তাদের উপাদান সংখ্যাও সমান। ধরা যাক,

$A = \{3, 7, 9, 11, 15\}$ এবং

$B = \{7, 9, 3, 15, 11\}$

সমাহারদ্বয়ের উপাদানসমূহের অনুক্রম বিভিন্ন হলেও উভয়ের সকল উপাদান একই, অতএব $A = B$। দুইটি সমাহার A এবং B সমান হলে গাণিতিকভাবে তার শর্তটি নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায় ঃ

x-এর সকল মানের জন্য

$x \in A \longleftrightarrow x \in B$ হলে $A = B$

দুটি সমাহার $A = \{3, 4\}$ এবং $B = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$ দেয়া থাকলে $A = B$ হবে। আবার, নিচের তিনটি সমাহার লক্ষ্য কর ঃ

$A = \{x \mid x$ দহরম শব্দের একটি অক্ষর $\}$,

$B = \{$দ, ম, র, হ$\}$,

$C = \{x \mid x$ হরদম শব্দের একটি অক্ষর$\}$

প্রদত্ত উদাহরণসমূহের ক্ষেত্রেও $A = B = C$। পরস্পর সমান সমাহারসমূহকে অনেক সময় অভেদ সমাহার বা identical set নামেও অভিহিত করা হয়।

দুটি সমাহার A এবং B একটি অপরটির সমতুল্য (Equivalent) হয় যখন একটির প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে অপরটির প্রতিটি উপাদান সামঞ্জস্যপূর্ণ। অন্য কথায়, দুটি সমতুল্য সমাহারের একটির প্রতিটি উপাদানের বিপরীতে অপরটির নির্দিষ্ট একটি উপাদান থাকবে যেমন,

$A = \{p, q, r, s, t\}$ এবং $B = \{3, 5, 8, 9, 10\}$

লক্ষণীয় যে সমতুল্য দুটি সমাহারের একটির উপাদান সংখ্যা অপরটির উপাদান সংখ্যার সমান. দুটি সমতুল্য সমাহার A এবং B কে A B লিখে প্রকাশ করা হয়।

উপসমাহার (Subset)

কোন একটি সমাহারের সব কটি উপাদান যদি অন্য কোন একটি সমাহারেও থাকে তবে প্রথম সমাহারটিকে দ্বিতীয়টির উপসমাহার বলে। A এবং B দুটি সমাহারের A B–এর উপসমাহার হলে B–এর উপাদান সংখ্যা A–এর উপাদান সংখ্যার সমান কিংবা বেশি হবে অর্থাৎ প্রতিটি সমাহারই তার সমান কোন সমাহারের উপসমাহার হতে পারে। অপরদিকে যদি দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে AB সমাহারের উপসমাহার হয় এবং B–এর উপাদানসংখ্যা A–এর উপাদানসংখ্যার অন্তত একটিও বেশি হয় তবে A সমাহারকে B সমাহারের যথার্থ উপসমাহার (proper subset) বলে। উদাহরণ ঃ

$A = \{p, q, r, s, t\}$ এবং

$B = \{a, b, c, p, q, r, s, t, z\}$ দুটি সমাহার থাকলে A B–এর যথার্থ উপসমাহার এবং তা $A \subset B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যখন কোন দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে A B–এর উপসমাহার জানা থাকে কিন্তু দুটিরই অথবা তাদের যেকোন একটির উপাদানসংখ্যা অজানা থাকে সেক্ষেত্রে $A \subseteq B$ লেখা হয়। $A \subseteq$–এর অর্থ A B–এর যথার্থ উপসমাহার অথবা $A = B$। জেনে রাখা ভাল যে শূন্য সমাহার যেকোন সমাহারেরই উপসমাহার হতে পারে অর্থাৎ $\emptyset \subset A$ যেখানে A যেকোন সমাহার। এছাড়া কোন সমাহার A যদি অপর কোন সমাহার B এর উপসমাহার এবং B সমাহার তৃতীয় একটি সমাহার C–এর উপসমাহার হয় তবে A C–এর উপসমাহার হবে, অর্থাৎ

যদি $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হয় তবে $A \subset C$

$B = \{$দ, ম, র, হ$\}$,

$C = \{ x \mid x$ হরদম শব্দের একটি অক্ষর$\}$

প্রদত্ত উদাহরণসমূহের ক্ষেত্রেও $A = B = C$। পরস্পর সমান সমাহারসমূহকে অনেক সময় অভেদ সমাহার বা identical set নামেও অভিহিত করা হয়।

দুটি সমাহার A এবং B একটি অপরটির সমতুল্য (Equivalent) হয় যখন একটির প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে অপরটির প্রতিটি উপাদান সামঞ্জস্যপূর্ণ। অন্য কথায়, দুটি সমতুল্য সমাহারের একটির প্রতিটি উপাদানের বিপরীতে অপরটির নির্দিষ্ট একটি উপাদান থাকবে যেমন,

$A = \{p, q, r, s, t\}$ এবং $B = \{3, 5, 8, 9, 10\}$

লক্ষণীয় যে সমতুল্য দুটি সমাহারের একটির উপাদান সংখ্যা অপরটির উপাদান সংখ্যার সমান দুটি সমতুল্য সমাহার A এবং B কে $A \equiv B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

উপসমাহার (Subset)

কোন একটি সমাহারের সব কটি উপাদান যদি অন্য কোন একটি সমাহারেও থাকে তবে প্রথম সমাহারটিকে দ্বিতীয়টির উপসমাহার বলে। A এবং B দুটি সমাহারের A B–এর উপসমাহার হলে B–এর উপাদান সংখ্যা A–এর উপাদান সংখ্যার সমান কিংবা বেশি হবে। অর্থাৎ প্রতিটি সমাহারই তার সমান কোন সমাহারের উপসমাহার হতে পারে। অপরদিকে যদি দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে AB সমাহারের উপসমাহার হয় এবং B–এর উপাদানসংখ্যা A–এর উপাদানসংখ্যার অন্তত একটিও বেশি হয় তবে A সমাহারকে B সমাহারের যথার্থ উপসমাহার (proper subset) বলে। উদাহরণ ঃ

$A = \{p, q, r, s, t\}$ এবং

$B = \{a, b, c, p, q, r, s, t, z\}$ দুটি সমাহার থাকলে A B–এর যথার্থ উপসমাহার এবং তা $A \subset B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যখন কোন দুটি সমাহার A এবং B–এর মধ্যে A B–এর উপসমাহার জানা থাকে কিন্তু দুটিরই অথবা তাদের যেকোন একটির উপাদানসংখ্যা অজানা থাকে সেক্ষেত্রে $A \subseteq B$ লেখা হয়। $A \subseteq$ –এর অর্থ A B–এর যথার্থ উপসমাহার অথবা $A = B$। জেনে রাখা ভাল যে শূন্য সমাহার যেকোন সমাহারেরই উপসমাহার হতে পারে অর্থাৎ $\emptyset \subset A$ যেখানে A যেকোন সমাহার। এছাড়া কোন সমাহার A যদি অপর কোন সমাহার B এর উপসমাহার এবং B সমাহার তৃতীয় একটি সমাহার C–এর উপসমাহার হয় তবে A C–এর উপসমাহার হবে, অর্থাৎ

যদি $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হয় তবে $A \subset C$

এবং শুধু বাণিজ্যিক আইন পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা হবে

$$n(C') = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$= 152 - 36 - 27 + 11$$
$$= 100$$

অতএব শুধু একটি বিষয় পড়ে এমন ছাত্রের মোট সংখ্যা হবে $(59 + 76 + 100) = 235$ জন।

৩.৫ একটি শহরের মোট লোকসংখ্যা 50,000. এদের মধ্যে 18000 জন পড়ে ইত্তেফাক পত্রিকা এবং 13000 জন পড়ে সংবাদ। যদি দুটি পত্রিকাই পড়ে এমন লোকের সংখ্যা 4000 হয় তবে শহরের শতকরা কতভাগ লোক কোন পত্রিকাই পড়ে না?

সমাধান ঃ ধরা যাক $n(A)$ = ইত্তেফাক পাঠকের সংখ্যা

$n(B)$ = সংবাদ পাঠকের সংখ্যা

শর্তানুযায়ী $n(A) = 18000$, $n(B) = 13000$ এবং

$n(A \cap B) = 4000$

দুটি পত্রিকার যেকোন একটি অথবা দুটিই পড়ে এমন লোকের সংখ্যা

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 18000 + 13000 - 4000$$
$$= 27000$$

কোন পত্রিকাই পড়ে না এমন লোকের সংখ্যা $= 50000 - 27000$

$= 23000$

এবং তাদের শতকরা হার $= \dfrac{23000 \times 100}{50000} = 46\%$

৩.৬ কোন কোম্পানির একটি পণ্যের চাহিদা সমীক্ষার একটি প্রতিবেদন তৈরির জন্য তথ্য সংগ্রহের পর নিচের তালিকাটি পাওয়া গেল ঃ

মাস	মোট ক্রেতার মধ্যে পণ্যটি ক্রয়কারীর সংখ্যার শতকরা হার
জানুয়ারি	59
ফেব্রুয়ারি	62

কোন সমাহার A অন্য একটি সমাহার B-এর উপসমাহার না হলে বুঝতে হবে A-তে অন্তত এমন একটি উপাদান আছে যা B-তে নেই। এছাড়া প্রতিটি সমাহারই তার নিজের উপসমাহার।

সার্বজনীন সমাহার (Universal set)

নির্দিষ্ট কোন সমাহারের উপাদানসমূহ পরীক্ষা করলে দেখা যাবে এ উপাদানসমূহ বৃহত্তর কোন-না-কোন সমাহারের উপাদানসমূহের অংশ। সেক্ষেত্রে এই বৃহত্তর সমাহারকে নির্দিষ্ট সমাহারটির সার্বজনীন সমাহার বলা হবে। যেমন ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের ছাত্রবৃন্দ ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্রবৃন্দেরই একটি অংশ এবং সে কারণে বাণিজ্য অনুষদের ছাত্রদের সমাহারের জন্য সার্বজনীন সমাহার হবে বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্রদের সমাহার। নিচের সমাহার দুটি লক্ষ্য কর ঃ

$A = \{x \mid x$ বাংলাদেশের একটি মহাবিদ্যালয় $\}$

$B = \{x \mid x$ বাংলাদেশের একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠান $\}$

উদাহরণে B সমাহারটি A সমাহারের জন্য সার্বজনীন সমাহার হিসাবে চিহ্নিত হবে।

সমাহারের ছেদন (Intersection of sets)

দুটি সমাহারের ছেদনের ফলে এমন একটি তৃতীয় সমাহার তৈরি হয় যার সকল উপাদান প্রথম দুটি সমাহারের উভয়টিতেই থাকে। ধরা যাক A এবং B দুটি সমাহার দেয়া আছে ঃ

$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{5, 7, 13, 15\}$ এ ক্ষেত্রে A এবং B-এর ছেদনের ফলে উৎপন্ন তৃতীয় সমাহার C-এর বর্ণনা হবে

$C = \{5, 7\}$ এবং সাংকেতিকভাবে লেখা হয়

$A \cap B = C$ (পড়তে হবে, A ছেদন B সমান C)। এছাড়া,

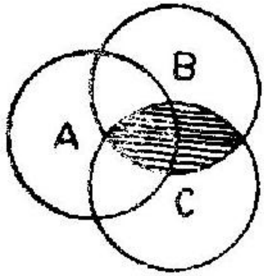
$A \cap B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \in B\}$।

সমাহারের সংখ্যা দুয়ের অধিক (যত বেশিই) হোক না কেন তাদের ছেদনের ফলে উৎপন্ন সমাহারের উপাদানসমূহকে অবশ্যই প্রদত্ত সমাহারসমূহের প্রতিটিতে থাকতে হবে। যেমন,

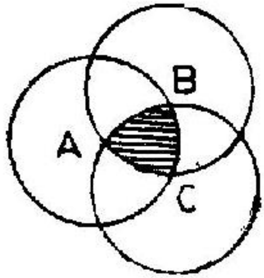
$A \cap B \cap C \cap D = E$ হলে, $E = \{x \mid x \in A, x \in B, x \in C$ এবং $x \in D\}$

চিত্রের মাধ্যমে বিষয়টি নিম্নোক্ত উপায়ে বোঝানো যায় ঃ

ধরা যাক A, B এবং C তিনটি সমাহারকে তিনটি বৃত্ত দ্বারা বোঝানো হয়েছে



[চিত্র ঃ ১]



[চিত্র ঃ ২]

চিত্র–১ B এবং C সমাহারদ্বয়ের ছেদন দেখাচ্ছে এবং চিত্র–২ A, B এবং C-এর ছেদন দেখাচ্ছে। প্রথম চিত্রের ছায়াবৃত (shaded) এলাকাটি হচ্ছে $B \cap C$ সমাহার এবং দ্বিতীয় চিত্রের ছায়াবৃত অংশটি হচ্ছে $A \cap B \cap C$ সমাহার।

যদি দুই বা ততোধিক সমাহার এমন হয় যে তাদের কোন সাধারণ উপাদান নেই তবে সেক্ষেত্রে তাদের ছেদন হবে $\emptyset$, অর্থাৎ শূন্য সমাহার। ছেদন সম্পর্কে আরও কয়েকটি নিয়ম হচ্ছে ঃ

ক. $A \cap B = C$ হলে C A এবং B উভয়েরই উপসমাহার, অর্থাৎ

$C = A \cap B \subseteq A$ এবং $C = A \cap B \subseteq B$

খ. শূন্য সমাহারের সঙ্গে যে কোন সমাহারের ছেদনের ফলে শূন্য সমাহার পাওয়া যায়, অর্থাৎ

$A \cap \emptyset = \emptyset$

গ. কোন সমাহারের সঙ্গে একই সমাহার কিংবা তার সমান কোন সমাহার ছেদ করলে একই সমাহার পাওয়া যায়, অর্থাৎ

$A \cap A = A$

ঘ. A ছেদন B বা B ছেদন A –এর মধ্যে গাণিতিক কোন পার্থক্য নেই, অর্থাৎ

$A \cap B = B \cap A$

ঙ. দুয়ের অধিক সমাহার পরস্পরকে ছেদ করলে সমাহারগুলি আলাদা আলাদাভাবে কোন জুটি বা সমষ্টিকে ছেদনের ক্রম পরিবর্তনে ছেদনের চূড়ান্ত ফল পরিবর্তিত হয় না, অর্থৎ

$A \cap B \cap C \cap D = A \cap (B \cap C \cap D) = (B \cap A) \cap (C \cap D) = (A \cap C \cap D) \cap B$ ইত্যাদি

চ. কোন একটি সমাহার অপর কোন সমাহারের উপসমাহার হলে উপসমাহারটির সঙ্গে মূল সমাহারের ছেদনের ফলে উপসমাহারটিকেই পাওয়া যায়, অর্থাৎ

যদি $A \subseteq B$ হয় তবে $A \cap B = A$

ছ. একটি সমাহার দ্বিতীয় কোন সমাহারের উপসমাহার এবং দ্বিতীয় সমাহারটি তৃতীয় কোন সমাহারের উপসমাহার হলে প্রথম সমাহারটি দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সমাহারের ছেদনের উপসমাহার হবে, অর্থাৎ

$A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ হলে $A \subseteq (B \cap C)$

সমাহারের যোজন (Union of sets)

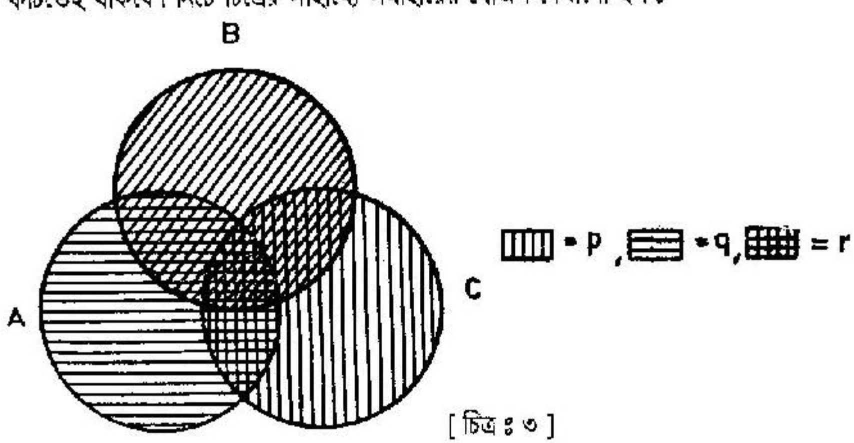
A এবং B দুটি সমাহারের যোজনের ফলে এমন একটি তৃতীয় সমাহার C পাওয়া যায় যার উপাদান A অথবা B এদের যেকোন একটিতে অথবা উভয়টিতেই থাকে। যেমন,

$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ এবং

$B = \{5, 7, 13, 15\}$ হলে

A যোজন B অর্থাৎ $A \cup B = C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

সমাহারের সংখ্যা দুয়ের অধিক হলে তাদের যোজনের ফলে উৎপন্ন সমাহারের উপাদান যোজনে অংশগ্রহণকারী যেকোন সমাহারে, অথবা কয়েকটিতে, অথবা সব কটিতেই থাকবে। নিচে চিত্রের সাহায্যে সমাহারের যোজন দেখানো হল ঃ



[চিত্র ঃ ৩]

A, B এবং C সমাহারের যোজনের ফলে সৃষ্ট নতুন সমাহার হবে চিত্রে যেকোন প্রকার দাগ দ্বারা আবৃত পূরো অংশ। সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করলে,

$A \cup B = \{x | x \in A$ কিংবা $x \in B\}$

$A \cup B \cup C = \{x | x \in A$ কিংবা $x \in B$ কিংবা $x \in C\}$

সমাহারসমূহের যোজনের ক্ষেত্রেও কতিপয় নিয়ম আছে। এখানে সাংকেতিক চিহ্ন দ্বারা সেসব নিয়ম লিপিবদ্ধ করা হল ঃ

ক. $A \cup A = A$

খ. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

গ. $A \cup B = B \cup A$

ঘ. $A \cup \emptyset = A$

ঙ. $A \cup B = \emptyset$ হলে $A = \emptyset$ এবং $B = \emptyset$

চ. $B \subseteq A$ হলে $A \cup B = A$ এবং $A \subseteq B$ হলে $A \cup B = B$

ছ. $A \subseteq (A \cup B)$ হলে $B \subseteq (A \cup B)$

জ. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ এবং

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

সম্পূরক সমাহার (Complement of a set)

কোন সমাহার U যদি অপর কোন সমাহার A–এর জন্য সার্বজনীন সমাহার হয় তবে A সমাহারের সম্পূরক বলতে এমন একটি সমাহারকে বোঝাবে যার উপাদানসমূহ U সমাহারে আছে কিন্তু A সমাহারে নেই। A সমাহারের সম্পূরক সমাহারকে A', A^c, $\overline{A}$ কিংবা $\sim A$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং

$A' = U - A : A' = \{x | x \in U$ কিন্তু $x \notin A\}$

ধরা যাক, $U = \{1, 2, 3, 7, 9, 10, 12\}$

এবং $A = \{2, 3, 9\}$

সেক্ষেত্রে, $A' = \{1, 7, 10, 12\}$

দুটি সমাহারের প্রভেদ (Difference of two sets)

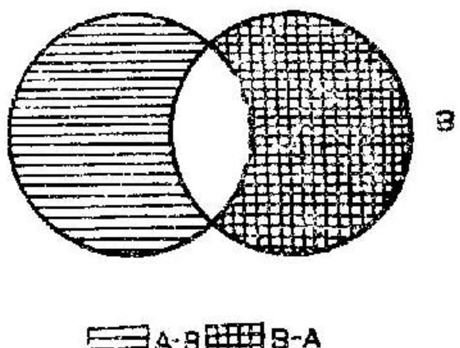
দুটি সমাহার A এবং B–এর প্রভেদকে $A-B$ কিংবা $A \sim B$ কিন্তু B এবং A–এর প্রভেদকে $B-A$ কিংবা $B \sim A$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A-B$ হবে এমন একটি তৃতীয়

সমাহার যার উপাদানসমূহ A সমাহারে আছে কিন্তু B সমাহারে নেই। পক্ষান্তরে B–A হবে অপর একটি সমাহার যার উপাদানসমূহ B সমাহারে আছে কিন্তু A সমাহারে নেই। সাংকেতিকভাবে,

$A - B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \notin B\}$

$B - A = \{x \mid x \in B$ এবং $x \notin A\}$

লক্ষণীয় যে, $A - B \neq B - A$। চিত্রে প্রকাশ করলে দুটি সমাহারের প্রভেদকে নিম্নোক্ত উপায়ে দেখানো যায় ঃ



[চিত্র ঃ ৪]

ধরা যাক $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 11\}$ এবং

$B = \{2, 4, 5, 9, 10, 11\}$

সেক্ষেত্রে $A - B = \{1, 3, 6, 8\}$ এবং $B - A = \{4, 9, 10\}$

দুটি সমাহারের প্রভেদ সংক্রান্ত উপর্যুক্ত বর্ণনা থেকে সহজেই অনুমেয় যে,

$$(A - B) \subseteq A \text{ এবং } (B - A) \subseteq B$$

সমাহার ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের সুবিধার জন্য এখানে সমাহার সংক্রান্ত আরও কয়েকটি সূত্র উল্লেখ করা হল ঃ

ক. $A \cap A' = \emptyset$ এবং $A \cup A' = U$ যেখানে U হচ্ছে A-এর সার্বজনীন সমাহার।

খ. $U' = \emptyset$ এবং $\emptyset' = U$

গ. $(A')' = A$

ঘ. $A \subset B$ হলে $B' \subset A$

ঙ. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং $(A \cap B)' = A'B'$*

চ. $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$ এবং $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$

ছ. $A \cup B = (A - B) \cup B$

জ. $A - B = A$ হলে $A \cap B = \emptyset$

ঝ. $A' - B' = B - A$

ঞ. $A - (A - B) = A \cap B$ এবং $B - (A - B) = B \cap A$

ট. $A \cap (B - A) = \emptyset$ এবং $(A - B) \cap B = \emptyset$

ঠ. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ড. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ঢ. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ এবং

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

ণ. $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$

ত. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

সমাহারের উপাদানসংখ্যা

ব্যবহারিক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সবচেয়ে বেশি প্রয়োজন সসীম সমাহারসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক থেকে তাদের বিভিন্নটির উপাদান সংখ্যা নির্ধারণের নিয়ম।

সাধারণভাবে কোন সমাহারকে A দ্বারা চিহ্নিত করলে $n(A)$ দ্বারা A সমাহারের মোট উপাদানসংখ্যা বোঝায়। যেমন, $A = \{2, 5, -4, 8, 1\}$ হলে $n(A) = 5$; $B = \{x \mid x$ হচ্ছে 1 এবং 12-এর মধ্যে একটি বেজোড় সংখ্যা $\}$ হলে $n(B) = 6$ ইত্যাদি।

অসংলগ্ন সমাহার (Disjoints)

ধরা যাক A এবং B এমন দুটি সমাহার দেয়া আছে যাদের একটির কোন উপাদানই অপরটিতে নেই। এমন দুটি সমাহারকে অসংলগ্ন সমাহার বলে। তাদের ক্ষেত্রে A এবং B সমাহারদ্বয়ের মোট উপাদান সংখ্যা হবে $n(A \cup B)$ এবং

---

* সূত্র দুটি ডি-মর্গানের সূত্র নামে পরিচিত

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \ldots \quad (1)$$

কিন্তু A এবং B সমাহারদ্বয় যদি অসংলগ্ন না হয় অর্থাৎ একটির কতিপয় উপাদান অপরটিতে থাকে তবে সেক্ষেত্রে দুটি সমাহারের মোট উপাদান সংখ্যা হবে

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \ldots \quad (2)$$

অনুরূপভাবে, A, B এবং C তিনটি অসংলগ্ন সমাহার হলে

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \quad \ldots \quad (3)$$

কিন্তু তারা যদি অসংলগ্ন না হয়, তবে

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \ldots \quad (4)$$

অবশ্য উপরের সূত্রসমূহের মধ্যে (2) এবং (4) নং সূত্রদ্বয়ই প্রধান, কেন না অসংলগ্ন সমাহারসমূহের জন্য

$n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ এবং $n(A \cap B \cap C)$ এদের প্রত্যেকেরই মান শূন্য।

কার্তেসীয় পূরণ (Cartesian product)

কতিপয় সমাহারের প্রতিটির একটি উপাদান যদি অপরটির অপর কোন উপাদানের সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে অবস্থান করে তবে সামঞ্জস্যপূর্ণ উপাদানদ্বয়ের দুটিকে শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি (Ordered pair) বলা হয়। শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি তৈরি করে এমন কয়েকটি সমাহারের উদাহরণ

(1, 2) ; (1, 4) কিংবা (1, 2, 3) ; (1, 4, 9) ইত্যাদি।

শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি হিসাবে (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) ইত্যাদিকে দেখানো যায়।

সমতলক্ষেত্রে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য স্থানাংক দেয়া হলে স্থানাংকসমূহকে একেকটি শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি বলা যায়। শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটির সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য হচ্ছে তার উপাদানসমূহের প্রথম ও দ্বিতীয় হিসাবে সুনির্দিষ্ট অবস্থান। স্থানাংক (4, 7) এবং (7, 7) দুটি আলাদা আলাদা বিন্দু নির্দেশ করে, যদিও সমাহার হিসাবে (4, 7) = (7, 4)। শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি (a, b) এবং (c, d) শুধুমাত্র তখনই সমান হয় যখন $a = c$ এবং $b = d$

A এবং B দুটি সমাহার হলে তাদের কার্তেসীয় পূরণ শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটিসমূহের এমন একটি সমাহার তৈরি করে যার উপাদানস্বরূপ জুটিগুলির প্রথম সদস্য A-তে এবং দ্বিতীয় সদস্য B–তে থাকে।

$A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{4, 5\}$ হলে কার্তেসীয় পূরণ

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$ এবং

$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

সমাহারের উপাদান হিসাবে শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি $(1, 4) \neq (4, 1)$; $(1, 5) \neq (5, 1)$; $(2, 4) \neq (4, 2)$ ইত্যাদি এবং সে কারণে

$$A \times B \neq B \times A$$

কার্তেসীয় পূরণের বৈশিষ্ট্যসমূহ

১. $A \times B$ এবং $B \times A$–এর উপাদান সংখ্যা সমান তবে $A = B$ না হলে $A \times B \neq B \times A$;

২. A এবং B দুটি অসংলগ্ন সমাহার হলে $A \times B$ এবং $B \times A$ উভয়েই অসংলগ্ন সমাহার হবে ;

৩. A–এর উপাদান সংখ্যা m এবং B–এর উপাদানসংখ্যা n হলে $A \times B$ এবং $B \times A$ উভয়েরই উপাদানসংখ্যা হবে $m \times n$

৪. A অথবা B এর যে কোনটি শূন্য সমাহার হলে $A \times B$ একটি শূন্য সমাহার হবে ;

৫. A অথবা B–এর একটি অসীম সমাহার হলে এবং অপরটি শূন্য সমাহার না হলে $A \times B$ একটি অসীম সমাহার হবে।

৩.১ $A = \{1, 4\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{3, 5\}$ হলে

ক. প্রমাণ কর যে, $A \times B \neq B \times A$

খ. $(A \times B) \cap (A \times C)$–এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

ক. $A \times B = \{1, 4\} \times \{2, 3\}$

$= \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3)\}$

$B \times A = \{2, 3\} \times \{1, 4\}$

$= \{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

$\therefore A \times B \neq B \times A$

খ. $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3)\}$

$A \times C = \{(1, 3), (1, 5), (4, 3), (4, 5)\}$

$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 3), (4, 3)\}$

৩.২ $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; $C = \{1, 3, 4\}$ এবং $D = \{2, 4, 5\}$ হলে প্রমাণ কর যে

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

সমাধান ঃ $A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\}$

$= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

$C \times D = \{1, 3, 4\} \times \{2, 4, 5\}$

$= \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 5)\}$

$\therefore (A \times B) \cap (C \times D) = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

আবার, $A \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$

$B \cap D = \{2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2, 4\}$

$\therefore (A \cap C) \times (B \cap D) = \{1, 3\} \times \{2, 4\}$

$= \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

$= (A \times B) \cap (C \times D)$

সমাহারের ব্যবহার

সমাহার তত্ত্ব প্রয়োগের মাধ্যমে বিভিন্ন ব্যবহারিক সমস্যা সমাধান করা যায়। অনেক ক্ষেত্রে ভিন্নভাবে সমাধান করা গেলেও সমাহারের সাহায্যে সমাধানের প্রক্রিয়াকে অনেক সহজ করানো যায়। এখানে কতিপয় উদাহরণ দেয়া হল ঃ

৩.৩ একটি শ্রেণীতে মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা 100। এদের মধ্যে 30 জন্য ক্লাসে বই আনে, 20 জন বই আনে কিন্তু খাতা আনে না। উক্ত শ্রেণীতে বই এবং খাতা দুটোই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা কত? কতজন শুধু খাতা আনে কিন্তু বই আনে না?

সমাধান ঃ ধরা যাক, $n(A)$ = বই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা

$n(B)$ = খাতা আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা

সেক্ষেত্রে বই ও খাতা দুটোই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা হবে $n(A \cap B)$ এবং শুধু বই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা $= n(A) - n(A \cap B)$; প্রদত্ত বর্ণনানুযায়ী, $n(A) = 30$; $n(A) - n(A \cap B) = 20$ এবং $n(A \cup B) = 100$

বই ও খাতা দুটোই আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা অর্থাৎ $n(A \cap B)$–এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$
\begin{aligned}
\text{যেহেতু,}\quad & n(A) - n(A \cap B) = 20 \\
\text{বা}\quad & 30 - n(A \cap B) = 20 \\
\therefore\quad & n(A \cap B) = 30 - 20 \\
& = 10
\end{aligned}
$$

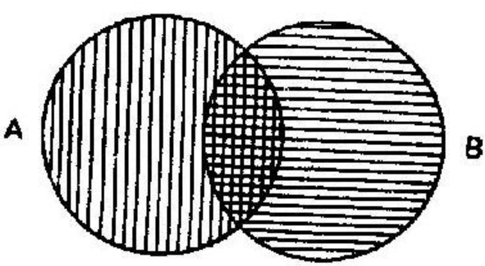
শুধু খাতা আনে এমন ছাত্রাছাত্রী সংখ্যা জানার পুর্বে খাতা আনে (বই আনতেও পারে, না–ও আনতে পারে) এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা অর্থাৎ $n(B)$–এর মান জানতে হবে।

সূত্রানুযায়ী

$$
\begin{aligned}
& n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\
\text{বা,}\quad & 100 = 30 + n(B) - 10 \\
& \therefore n(B) = 100 - 30 + 10 \\
& = 80
\end{aligned}
$$

এবং শুধু খাতা আনে এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা $= n(B) - n(A \cap B)$
$= 80 - 10$
$= 70$

বিকল্প সমাধান



[চিত্র ঃ ৫]

প্রদত্ত সমস্যাটির দৃশ্যবৎ অনুধাবন এবং দ্রুততর ও সহজতর উপায়ে সমাধানের জন্য উপরের চিত্রটি ব্যবহার করা যায়। চিত্রের A বৃত্তটি যারা বই আনে তাদের সমাহার এবং B বৃত্তটি যারা খাতা আনে তাদের সমাহার হলে সহজেই অনুমেয় যে P অংশটি যারা শুধু বই আনে তাদের সমাহার, q অংশটি যারা শুধু খাতা আনে তাদের সমাহার এবং r অংশটি যারা বই ও খাতা দুটোই আনে তাদের সমাহার প্রকাশ করে।

$n(P) = 20$; $n(A) = 30$ $\therefore$ $n(r) = 30 - 20 = 10$

আবার $n(B) = n(q) + n(r)$ যেখানে $n(B) = 100 - n(A) = 80$

$\therefore$ $80 = n(q) + 10$

বা, $n(q) = 80 - 10$

$= 70$

বর্ণিত পদ্ধতিটি সমাহার সংক্রান্ত অন্যান্য সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা যায় এবং তাতে সমাধানের প্রক্রিয়া সহজ হয় বলে অন্যান্য সমস্যার ক্ষেত্রেও শিক্ষার্থীদের এ পদ্ধতির প্রয়োগ চর্চা করার পরামর্শ দেয়া হল। পদ্ধতিটি অপেক্ষাকৃত সহজ কিন্তু প্রতিবার তাতে চিত্রাঙ্কন প্রয়োজন বলে বর্তমান গ্রন্থে পরবর্তীতে তার পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে শুধু বীজগাণিতিক সমাধান প্রক্রিয়া দেখানো হবে।

৩.৪ 400 জন ছাত্রের মধ্যে সমীক্ষা চালিয়ে দেখা গেল তাদের 102 জন হিসাব বিজ্ঞান পড়ে, 110 জন পড়ে কারবার ব্যবস্থাপনা এবং 152 জন পড়ে বাণিজ্যিক আইন। মোট ছাত্রসংখ্যার 27 জন কারবার ব্যবস্থাপনা ও বাণিজ্যিক আইন দুটোই পড়ে, 36 জন পড়ে হিসাববিজ্ঞান ও বাণিজ্যিক আইন এবং 18 জন পড়ে হিসাববিজ্ঞান ও কারবার ব্যবস্থাপনা। হিসাববিজ্ঞান, কারবার ব্যবস্থাপনা ও বাণিজ্যিক আইন এই তিনটি বিষয়ই পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা 11। কতজন ছাত্র উপর্যুক্ত তিনটি বিষয়ের কোনোটিই পড়ে না? কতজন শুধু একটি বিষয় পড়ে?

সমাধান ঃ ধরা যাক, হিসাববিজ্ঞান পড়া মোট ছাত্রের সংখ্যা $= n(A)$

কারবার ব্যবস্থাপনা পড়া মোট ছাত্রের সংখ্যা $= n(B)$

এবং বাণিজ্যিক আইন পড়া মোট ছাত্রের সংখ্যা $= n(C)$

সেক্ষেত্রে $n(A) = 102$

$n(B) = 110$

$n(C) = 152$

$n(A \cap B) = 18$

$n(A \cap C) = 36$

$n(B \cap C) = 27$

$n(A \cap B \cap C) = 11$

কোন বিষয়ই পড়ে না এমন ছাত্রের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নির্ধারণ করতে হবে কতজন কোন–না–কোন বিষয় পড়ে অর্থাৎ $n(A \cup B \cup C)$ এর মান

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap C)$$
$$- n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$
$$= 102 + 110 + 152 - 27 - 36 - 18 + 11$$
$$= 294$$

মোট ছাত্রের সংখ্যা 400 $\therefore$ কোন বিষয়ই পড়ে না এমন ছাত্রের সংখ্যা হবে $(400 - 294) = 106$ জন।

শুধু একটি বিষয় পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে দেখা যাক কতজন শুধু হিসাব বিজ্ঞান পড়ে।

শর্তানুযায়ী হিসাব বিজ্ঞান পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা $n(A) = 102$ এদের মধ্যে বিভিন্ন ধরণের ছাত্র আছে ঃ

ক. যারা শুধু হিসাব বিজ্ঞান পড়ে অর্থাৎ $n(A')$

খ. যারা হিসাব বিজ্ঞান ও কারবার ব্যবস্থাপনা দুটোই পড়ে অর্থাৎ $n(A \cap B)$

গ. যারা হিসাববিজ্ঞান ও বাণিজ্যিক আইন দুটোই পড়ে অর্থাৎ $n(A \cap C)$

ঘ. যারা হিসাববিজ্ঞান, কারবার ব্যবস্থাপনা ও বাণিজ্যিক আইন তিনটি পড়ে অর্থাৎ $n(A \cap B \cap C)$

এখন শুধু হিসাববিজ্ঞান পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা নির্ণয় করতে হলে সূত্রটি হবে

$$n(A') = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(চিত্রাঙ্কন করে সূত্রটির সত্যতা যাচাই কর)

$$= 102 - 18 - 36 + 11$$
$$= 59$$

অনুরূপভাবে শুধু কারবার ব্যবস্থাপনা পড়ে এমন ছাত্রের সংখ্যা হবে

$$n(B') = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$= 110 - 18 - 27 + 11$$
$$= 76$$

মাস	মোট ক্রেতার মধ্যে পণ্যটি ক্রয়কারীর সংখ্যার শতকরা হার
মার্চ	62
জানুয়ারি এবং ফেব্রুয়ারি	35
ফেব্রুয়ারি এবং মার্চ	33
জানুয়ারি এবং মার্চ	31
জানুয়ারি, ফেব্রুয়ারি এবং মার্চ	22

কিন্তু তথ্যগুলি প্রতিবেদনে ব্যবহার করা গেল না। এর কারণ কি?

সমাধান ঃ প্রাপ্ত তথ্যাবলীর যথার্থতা যাচাই করা যাক। যেহেতু তথ্যগুলি ক্রেতাদের শতকরা অংশ হিসাবে দেখানো হয়েছে। মোট ক্রেতার সংখ্যা হবে 100. জানুয়ারি ফেব্রুয়ারি, এবং মার্চ ক্রেতাদের সংখ্যা যথাক্রমে $n(A)$, $n(B)$ এবং $n(C)$ ধরে নিলে

$$n(A \cup B \cup C) = 100$$

এবং $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$

$$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 59 + 62 + 62 - 35 - 31 - 33 + 22$$

$$= 106 \neq 100$$

দেখা যাচ্ছে তথ্যগুলিতে অসঙ্গতি রয়ে গেছে। অতএব ত্রুটি নির্ধারণের পর তা সংশোধন না করে তথ্যগুলির ব্যবহার যুক্তিযুক্ত নয়।

২.৭ আসবাবপত্র ক্রেতার একটি সমীক্ষার মোট 80 জন ক্রেতার মধ্যে পর্যবেক্ষণ চালান হয়। দেখা গেল একটি করে সোফাসেট, খাট ও আলমিরা কিনতে চায় এমন ক্রেতার সংখ্যা যথাক্রমে 15, 20 এবং 25। একটি সোফা ও একটি খাট কিনতে চায় 5 জন, একটি খাট ও একটি আলমিরা কিনতে চায় 10 জন এবং একটি সোফা সেট ও একটি আলমিরা কিনতে চায় 6 জন। তিন ধরনের আসবাবপত্রের প্রতিটির একটি করে কিনতে চায় মাত্র 2 জন। নির্ধারণ করতে হবে

ক. কতজন কেবলমাত্র সোফা সেট কিনতে চায়?

খ. কতজন কেবলমাত্র খাট কিনতে চায়?

গ. কতজন কেবল আলমিরা কিনতে চায়?

ঘ. কতজন সোফাসেট কিনবেই কিন্তু খাট কিনবে না?

ঙ. কতজন সোফাসেট কিনবেই কিন্তু আলমিরা কিনবে না?

চ. কতজন খাট কিনবেই কিন্তু সোফা কিনবে না?

ছ. কতজন খাট কিনবেই কিন্তু আলমিরা কিনবে না?

জ. কতজন আলমিরা কিনবেই কিন্তু সোফা কিনবে না?

ঝ. কতজন আলমিরা কিনবেই কিন্তু খাট কিনবে না?

ঞ. আসবাবপত্র ক্রেতাদের কতজন আলমিরা কিনবে না?

ট. আসবাবপত্র ক্রেতাদের কতজন সোফা কিনবে না?

ঠ. আসবাবপত্র ক্রেতাদের কতজন খাট কিনবে না?

ড. কতজন কোন না কোন একটি আসবাব কিনবে?

ঢ. কতজন কোন আসবাবই কিনবে না?

সমাধান ঃ মনে করি, সোফাসেট কিনবে এমন ক্রেতার সেট S, খাট কিনবে এমন ক্রেতার সেট B এবং আলমিরা কিনবে এমন ক্রেতার সেট A। প্রশ্নানুযায়ী, $n(S) = 15$, $n(B) = 20$, $n(A) = 25$, $n(S \cap B) = 5$, $n(B \cap A) = 10$, $n(S \cap A) = 6$ এবং $n(S \cap B \cap A) = 2$

ক. শুধু সোফা কিনবে এমন ক্রেতার সেট S_0 হলে

$$\begin{aligned} n(S_0) &= n(S) - n(S \cap B) - n(S \cap A) + n(S \cap B \cap A) \\ &= 15 - 5 - 6 + 2 \\ &= 6 \text{ জন} \end{aligned}$$

খ. শুধু খাট কিনবে এমন ক্রেতার সেট B_0 হলে

$$\begin{aligned} n(B_0) &= n(B) - n(S \cap B) - n(B \cap A) + n(S \cap B \cap A) \\ &= 20 - 5 - 10 + 2 \\ &= 7 \text{ জন} \end{aligned}$$

গ. শুধু আলমিরা কিনবে এমন ক্রেতার সেট A_0 হলে

$$\begin{aligned} n(A_0) &= n(A) - n(B \cap A) - n(S \cap A) + n(S \cap B \cap A) \\ &= 25 - 10 - 6 + 2 \\ &= 11 \text{ জন} \end{aligned}$$

ঘ. যারা সোফা সেট কিনবেই কিন্তু খাট কিনবে না তারা আলমিরা কিনতেও পারে কিংবা নাও কিনতে পারে। অতএব, তাদের সংখ্যা হবে

$$n(S) - n(S \cap B) = 15 - 5 = 10 \text{ জন।}$$

ঙ. যারা সোফাসেট কিনবেই কিন্তু আলমিরা কিনবে না তারা খাট কিনতেও পারে কিংবা নাও কিনতে পারে। অতএব, তাদের সংখ্যা হবে

$n(S) - n(S \cap A) = 15 - 6 = 9$ জন।

চ. যারা খাট কিনবেই কিন্তু সোফাসেট কিনবে না তারা আলমিরা কিনতেও পারে কিংবা নাও কিনতে পারে। অতএব, তাদের সংখ্যা হবে

$n(B) - n(B \cap S) = 20 - 5 = 15$ জন।

ছ. যারা খাট কিনবেই কিন্তু আলমিরা কিনবে না তারা সোফাসেট কিনতেও পারে কিংবা নাও কিনতে পারে। অতএব, তাদের সংখ্যা হবে

$n(B) - n(B \cap A) = 20 - 10 = 10$ জন।

জ. যারা আলমিরা কিনবেই কিন্তু সোফাসেট কিনবে না তারা খাট কিনতেও পারে কিংবা নাও কিনতে পারে। অতএব তাদের সংখ্যা হবে

$n(A) - n(S \cap A) = 25 - 6 = 19$ জন।

ঝ. যারা আলমিরা কিনবেই কিন্তু খাট কিনবে না তারা সোফাসেট কিনতেও পারে কিংবা নাও কিনতে পারে। অতএব তাদের সংখ্যা হবে

$n(A) - n(B \cap A) = 25 - 10 = 15$ জন।

ঞ. কতজন আলমিরা কিনবে না তা জানার জন্যে প্রথমে জানা প্রয়োজন আসবাবপত্র ক্রেতাদের সংখ্যা কত অর্থাৎ কোন–না–কোন আসবাব কিনবে এমন ক্রেতার সংখ্যা কত। এমন আসবাব ক্রেতার সংখ্যা $n(S \cup B \cup A)$ এবং সূত্রানুযায়ী

$$\begin{aligned} n(S \cup B \cup A) &= n(S) + n(B) + n(A) - n(S \cap B) - n(B \cap A) - \\ &\quad n(S \cap A) + n(S \cap B \cap A) \\ &= 15 + 20 + 25 - 5 - 10 - 6 + 2 \\ &= 41 \text{ জন (ড অংশের উত্তর)} \end{aligned}$$

আসবাব ক্রেতাদের মধ্যে যারা আলমিরা কিনবে না তাদের সংখ্যা হবে

$n(S \cap B \cap A) - n(A) = 41 - 25 = 16$ জন।

ট. আসবাব ক্রেতাদের মধ্যে যারা সোফাসেট কিনবে না তাদের সংখ্যা হবে

$n(S \cap B \cap A) - n(S) = 41 - 15 = 26$ জন।

ঠ. আসবাব ক্রেতাদের মধ্যে যারা খাট কিনবে না তাদের সংখ্যা হবে

$n(S \cap B \cap A) - n(B) = 41 - 20 = 21$ জন।

ড. 41 জন (এর অংশ দেখুন)

ঢ. কোন আসবাবই কিনবে না এমন ক্রেতার সংখ্যা হবে

$$n(S \cap B \cap A)' = n(u) - n(S \cap B \cap A)$$

যেখানে u = সকল ক্রেতার সমাহার।

$$= 80 - 41$$

$$= 39$$ জন।

৩.৮ দুটি ব্রাণ্ডের সিগারেটের কোনটি কেমন চলে পরীক্ষার জন্যে একটি জরীপে দেখা গেল A ব্রান্ডের সিগারেট খায় 45 জন এবং B ব্রান্ডের সিগারেট খায় 25 জন। 10 জন উভয় ব্রান্ডেরই সিগারেট খায় আর 40 জন এ দুটি ব্রান্ডের একটিও খায় না। মোট কতজনের মধ্যে জরীপটি চালানো হয়েছিল?

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে,

$n(A) = 45$, $n(B) = 25$ এবং $n(A \cap B) = 10$ এবং

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 45 + 25 - 10$$
$$= 60$$

অর্থাৎ কোন–না–কোন ব্রান্ডের সিগারেট খায় এমন ভোক্তার সংখ্যা 60। আবার কোন ব্রান্ডেরই সিগারেট খায় না এমন উত্তরদাতার সংখ্যা 40। অতএব, জরীপের অধীন মোট উত্তরদাতার সংখ্যা = 60 + 40 = 100 জন।

৩.৯ কোন পণ্যের চাহিদা অপেক্ষক $Q_d = \frac{8P}{P-2}$ এবং যোগান অপেক্ষক $Q_s = P^2$। সমাহারের সাহায্যে পণ্যটির ভারসাম্য দর ও ভারসাম্য পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটিতে P–এর মান যথাক্রমে 1, 2, 3 . . . . ইত্যাদির জন্যে Q_d এর যেসব মান পাওয়া যাবে তাদের জুটি $\{P, Q_d\} = \{(1, -8), (3, 24), (4, 16), (5, \frac{40}{3}), (6, 12)\}$

(উল্লেখ্য যে $\{P, Q_d\}$ সমাহারকে P = 7, 8, 9 . . . . . ইত্যাদির জন্যে আরও বড় করা যায়। এছাড়া P = 2 এর ক্ষেত্রে $Q_d = \frac{8P}{P-2}$ সমীকরণের হর অংশ 0 হয় এবং 0 দ্বারা কোন লবকে ভাগ করা যায় না, সেকারণে P–এর মান 2 নেয়া হয় নি।)

$\{P, Q_s\} = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$

অর্থাৎ চাহিদা অপেক্ষকের P এবং Q_d এর সমাহার

$$A = \{(P, Q_d) | Q_d = \frac{8P}{P-2}\} = \{(1, -8), (3, 24), (4, 16), (5, \frac{40}{3}), (6, 12)\}$$

এবং যোগান অপেক্ষকের P এবং Q_s এর সমাহার

$$B = \{(P, Q_s) | Q_s = P^2\} = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$$

ভারসাম্য দর ও পরিমাণ হবে $A \cap B = \{4, 16\}$

$\therefore$ ভারসাম্য দর $P = 4$ মুদ্রা একক এবং $Q = 16$ একক

উল্লেখ করা প্রয়োজন যে সমাহারের সাহায্যে এ ধরনের সমস্যা সমাধানের সুযোগ সীমিত এবং সময়বহুল। এতৎসত্ত্বেও সমাহারের ব্যবহারিক প্রয়োগ দেখানোর জন্যে উদাহরণটি দৃষ্টান্তমূলক।

অনুশীলনী — ৩

১. সমাহার বলতে কি বোঝায়? সমাহারের প্রধান বৈশিষ্ট্য কি কি?

২. সমাহারকে বর্ণনার কি কি পদ্ধতি আছে? উদাহরণসহ বোঝাও।

৩. প্রতি জোড়া সমাহারের পার্থক্য বুঝিয়ে দাও ঃ সসীম ও অসীম সমাহার ; একক ও শূন্য সমাহার ; সমান ও সমতুল্য সমাহার, উপসমাহার ও সার্বজনীন সমাহার, সংলগ্ন ও অসংলগ্ন সমাহার।

৪. সমাহারের ছেদন ও যোজন বলতে কি বোঝায়? সূত্রসহ উদাহরণ দাও।

৫. সম্পূরক সমাহার কি? শূন্য সমাহারের কোন সম্পূরক সমাহার আছে কি?

৬. A, B, C এবং D চারটি সমাহার নিম্নরূপ ঃ

$A = \{x | x$ 1 থেকে 10 পর্যন্ত সকল পূর্ণ সংখ্যা $\}$

$B = \{x | x$ 1 থেকে 9 পর্যন্ত সকল জোড় সংখ্যা $\}$

$C = \{3, 5, 7\}$ এবং

$D = \{5, 7\}$

মান নির্ণয় কর ঃ (ক) $(A \cup B)$ (খ) $(A \cup C) \cap B$ (গ) $(B \cup D) \cup A$

(ঘ) $(B \cup C) \cap D$ (ঙ) $(\emptyset \cup A) \cap \emptyset$

৭. $X = \{a, b, c\}, Y = \{a, b\}, Z = \{a, b, d\}, M = \{c, d\}, N = \{d\}$ হলে নিচের বক্তব্যসমূহের কোনটি সত্য এবং কোনটি মিথ্যা যুক্তিসহ দেখাও।
(ক) $X \subset Y$ (খ) $X = Z$ (গ) $M \not\supset N$ (ঘ) $Y = M$ (ঙ) $\{d\} \in Y$ (চ) $\{a\} \subset Z$
(ছ) $\{b\} \subset M$

৮. এমন তিনটি সমাহার P, Q এবং R–এর উদাহরণ দাও, যেন
$P \cap R \neq \emptyset, P \cap Q \neq \emptyset$ এবং $\emptyset \cap R \neq \emptyset$, কিন্তু $P \cap Q \cap R = \emptyset$

৯. $P = \{2, 6, 8, 14, 22\}$; $Q = \{4, 8, 10, 14\}$, $R = \{6, 10, 12, 14, 18, 20\}$
মান নির্ণয় কর : (ক) $P \cap Q$ (খ) $P \cup R$ (গ) $Q \cup R$ (ঘ) $P - Q$ (ঙ) $P \cap Q$ (চ) $Q \cap R$ (ছ) $P \cup (Q - R)$ (জ) $P \cup Q \cup R$ (ঝ) $P \cup Q \cap R)$ এবং (ঞ) $P \cup Q \cap R$

১০. সার্বজনীন সমাহার $U = \{x | x$ 15–এর চেয়ে ছোট ধনাত্মক সংখ্যা $\}$ এবং $P = \{2, 6, 8, 14\}$, $Q = \{4, 8, 10, 14\}$, $R = \{6, 10, 12, 14\}$ হলে, মান নির্ণয় কর :
(ক) $(P \cap Q)'$ (খ) $P' \cap Q'$ (গ) $(Q' \cap R) \cup (P' \cap R)$ (ঘ) $R \cap (P' \cap Q')$
(ঙ) $P' \cap R'$

১১. P সমাহারের মোট উপাদান সংখ্যা 36. Q সমাহারের মোট উপাদান সংখ্যা 43 এবং $n(P \cup Q) = 60$ । $n(P \cap Q)$ এর মান কত ?

১২. একটি পরীক্ষার ফলাফল জরীপ করে দেখা গেল যে 15 জন ছাত্র গণিতে, 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 10 জন অর্থনীতিতে শতকরা 60 ভাগের বেশি নম্বর পেয়েছে। গণিত ও পরিসংখ্যান দুটোতেই 60 শতাংশের বেশি নম্বর পেয়েছে 10 জন। পরিসংখ্যান ও অর্থনীতিতে এমন নম্বর পেয়েছে 12 জন এবং গণিত ও অর্থনীতিতে এ ধরনের পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 14 জন; তিনটি বিষয়েই 60 শতাংশের বেশি নম্বর পেয়েছে মাত্র 60 জন। কোন–না–কোন একটি বিষয়ে শতকরা 60 ভাগের বেশি নম্বর পেয়েছে এমন ছাত্রের সংখ্যা কত ?

১৩. ক্লাসনোট লেখার জন্য ঝরনা কলম, বল পয়েন্ট এবং পেন্সিলের কোনটি ছাত্রছাত্রীরা কি পরিমাণ ব্যবহার করে তা যাচাই–এর জন্য 200 জনের মধ্যে সমীক্ষা চালিয়ে দেখা গেল যে তাদের 23% ঝরনা কলম, 79% বল পয়েন্ট এবং 36% পেন্সিল ব্যবহার করে। ছাত্রছাত্রীদের 9% ঝরনা কলম এবং বল পয়েন্ট, 31% বল পয়েন্ট ও পেন্সিল এবং 11% ঝরনা কলম ও পেন্সিল একত্রে রাখে। সমীক্ষার দিন 2% ছাত্রছাত্রীদের কাছে লেখার জন্য কিছুই ছিল না। (ক) কতজন ঝরনা কলম, বল পয়েন্ট ও পেন্সিল তিনটিই একসঙ্গে রাখে। খ) কতজন বল পয়েন্ট ও পেন্সিল

ব্যবহার করে তবে ঝরনা কলম ব্যবহার করে না? (গ) কতজন শুধু পেন্সিল ব্যবহার করে?

১৪. 100টি পরিবারের মধ্যে A, B এবং C তিন মার্কার কাপড় কাচা সাবানের জনপ্রিয়তা যাচাইয়ের সমীক্ষায় নিম্নলিখিত তথ্যসমূহ পাওয়া গেল ঃ

ব্যবহৃত সাবানের মার্কা	পরিবারের সংখ্যা
A, B এবং C তিন প্রকারই	5
A এবং B	9
B এবং C	12
A এবং C	19
A	40
B	20
C	30

তথ্যগুলি ব্যবহারে কোন অসুবিধা আছে কি?

১৫. 500 জন ছাত্রছাত্রীকে তাদের প্রিয় খেলা কি প্রশ্নের উত্তর দেয়ার জন্য এক প্রশ্নের একটি করে প্রশ্নপত্র দেয়া হল। 120 জন খেলাধুলায় আগ্রহী নয় কারণ দেখিয়ে প্রশ্নটির কোন উত্তর দেয়নি। তবে 90 জন বলেছে তারা ফুটবল ছাড়া আর কিছু পছন্দ করে না, 130 জন বলেছে ফুটবল তাদের প্রিয় খেলা, তবে খেলার নাম উল্লেখ না করে জানিয়েছে তাদের ফুটবল ছাড়া আরও প্রিয় খেলা আছে। একইভাবে খেলার নাম উল্লেখ না করে অন্যান্য খেলাসহ ক্রিকেট প্রিয় এমন বলেছে 240 জন। ফুটবল ও ক্রিকেট দুটোই প্রিয় খেলা জানিয়েছে 40 জন। 40 জন বলেছে তাদের প্রিয় খেলা ক্রিকেট ও দাবা আর 115 জন বলেছে তাদের প্রিয় খেলা ফুটবল কিন্তু দাবা তারা মোটেই পছন্দ করেন না। নির্ধারণ করতে হবে। ক) দাবা কতজনের প্রিয় খেলা? খ) কতজন ক্রিকেট ও দাবা পছন্দ করে কিন্তু ফুটবল পছন্দ করে না?

চতুর্থ অধ্যায়

সমীকরণ

[EQUATIONS]

দুটি বীজগাণিতিক বিবৃতির মধ্যে সমান চিহ্ন (=) দ্বারা প্রকাশিত সম্পর্ককে সমীকরণ বলে। যেমন

$x + 5 = 2x + 2$, $3x + 5 = 2y - 1$, $4x + 2y - 3 = 0$ ইত্যাদি।

সমীকরণে ধ্রুব (constant) ব্যতীত x, y ইত্যাদি চলক (variable) থাকে। একটি সমীকরণে এক বা একাধিক চলক থাকতে পারে। কোন সমীকরণে যদি একটি চলক থাকে তবে সমীকরণটি চলকের মাত্র একটি নির্দিষ্ট মানের জন্যই সিদ্ধ। যেমন $3x + 2 = x - 6$ সমীকরণটির ক্ষেত্রে x–এর মান কেবল -4 হবে। চলকের সংখ্যা একাধিক হলে তেমন একটি সমীকরণের চলকসমূহের মান অসংখ্য হতে পারে তবে সেক্ষেত্রে সমীকরণটি একটি চলকের প্রতিটি নির্দিষ্ট মানের জন্য অপর চলকেরও মান নির্দিষ্ট হয়। যেমন,

$x + 5 = 2y - 1$ একটি সমীকরণ দেয়া থাকলে x এবং y–এর দুটির একটির মান অনুযায়ী অপরটির মান নির্ধারিত হবে। $x = -1$ হলে $y = \frac{7}{2}$, $x = 1$ হলে $y = \frac{5}{2}$, $x = 2$ হলে $y = 4$, $y = 1$ হলে $x = -4$ হবে এবং x ও y–এর মান একেকটি শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি $(1, \frac{7}{2})$, $(-1, \frac{5}{2})$, $(2, 4)$, $(-4, 1)$ ইত্যাদি তৈরি করবে। লক্ষণীয় যে প্রদত্ত সমীকরণের জন্য $x = 1$ হলে $y = \frac{7}{2}$ ভিন্ন অন্য কোন মান হতে পারে না। অন্যান্য শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটির বেলায়ও তা প্রযোজ্য।

একটি সমীকরণ যেভাবেই দেয়া থাকুক তার উভয়পাশের বিবৃতিকে সমান চিহ্নের একপাশে এনে অপর পাশে শূন্য দেখানো যায়। যেমন,

$$x + 5 = 2x - 2 \rightarrow x + 5 - 2x + 2 = 0$$

$$\text{বা, } -x + 7 = 0$$

লক্ষণীয় যে পাশ বদলের সময় চলক, ধ্রুব বা ধ্রুবসহ চলকের চিহ্ন (sign) বদল হয়। যোজন বা বিয়োজনের ন্যায়পূরণ বা বিভাজনের বেলায় এটি প্রযোজ্য। যেমন,

$$\frac{2x + 5}{x + 2} = 3 \rightarrow 2x + 5 = 3(x + 2)$$

এবং $(3x + 2)(5x) = 2 \rightarrow 3x + 2 = \frac{2}{5x}$ ইত্যাদি।

কোন সমীকরণের উভয় দিকে একই সংখ্যা বা বিবৃতি যোগ করলে, উভয় দিক থেকে একই সংখ্যা বা বিবৃতি বিয়োগ করলে অথবা সমীকরণের উভয় দিককে একই সংখ্যা বা বিবৃতি দ্বারা পূরণ কিংবা বিভাজন করলে সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে।

$x + 5 = 2x - 2$ হলে,

$x + 5 + 3 = 2x - 2 + 3$ কিংবা

$3(x + 5) = 3(2x - 2)$ ইত্যাদি।

কোন সমীকরণের উভয় পাশকে একই সূচকে উন্নীত করলেও উভয় পাশের সমতা বজায় থাকে। অর্থাৎ

$$x + 5 = 2x - 2 \rightarrow (x + 5)^3 = (2x - 2)^3$$

সমীকরণের ঘাত (Degree of an equation)

কোন সমীকরণের চলকের সংখ্যা যতই হোক সেগুলি সূচক–সংবলিত বা সূচকবিহীন হতে পারে। যেমন,

$2x + 3 = x$, $4x^2 + 2y = 3x + 1$, $x^2 + y^2 = 1$ ইত্যাদি।

প্রথম সমীকরণে চলক x–এর সূচক 1, দ্বিতীয় সমীকরণে চলক x এবং y–এর সূচক যথাক্রমে 2 এবং 1, তৃতীয় সমীকরণে x এবং y দুটিরই সূচক 2। এক্ষেত্রে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ সূচক যথাক্রমে 1, 2 এবং 2। সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ সূচককেই সমীকরণের ঘাত বলে। সমীকরণের ঘাত 1 হলে সেটিকে একঘাত সমীকরণ, 2 হলে দ্বিঘাত, 3 হলে ত্রিঘাত, 4 হলে চতুর্ঘাত সমীকরণ বলে।

সাধারণভাবে প্রকাশিত একঘাত সমীকরণ $ax + by + c = 0$ থেকে x এবং y–এর সম্পর্ক যদি লেখচিত্রে (graph) প্রকাশিত হয় তবে তা একটি সরলরেখা হয় বলে একঘাত সমীকরণকে রৈখিক (Linear) সমীকরণ বলে। এক চলকের রৈখিক সমীকরণের সাধারণরূপ $ax + b = 0$ যেখানে a এবং b ধ্রুব, x চলক।

এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণকে (quadratic equation) সাধারণভাবে $ax^2 + bx + c = 0$, ত্রিঘাত (cubic) সমীকরণকে $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ চতুর্ঘাত (biquadratic) সমীকরণকে $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

অভেদ ও অসমতা (Identity and Inequality)

একই বীজগণিতিক বিবৃতি ভিন্নভাবে প্রকাশিত হলে স্বভাবতই বিবৃতি দুটি পরস্পরের সমান হয় এবং সমীকরণ আকারে এই সমতা প্রকাশ করলে সমীকরণটি চলক বা চলকসমূহের যেকোনো মানের জন্য সর্বদাই সিদ্ধ থাকে। সমতা প্রকাশের এধরনের সকল সমীকরণকে অভেদ বলা হয়। অভেদের সংখ্যা প্রচুর। তবে নিচের অভেদসমূহ গুরুত্বপূর্ণ বলে শিক্ষার্থীদের এগুলিকে সর্বদা স্মরণ রাখা কর্তব্য ঃ

১. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

২. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

৩. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ অথবা $(x - y)^2 + 2xy$

৪. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

৫. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

৬. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

৭. $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

অথবা $(x - y)(x^2 - xy + y^2)$

৮. $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$

৯. $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$

১০. $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$

অথবা, $x^2 + y^2 - (x - y)^2$

১১. $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$

১২. $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

১৩. $xy = \frac{(x + y)^2}{4} - \frac{(x - y)^2}{4}$

১৪. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

দুটি সংখ্যা বা বিবৃতি পরস্পরের সমান না হলে তাদের একটি অপরটির চেয়ে বড় কিংবা অপরটির চেয়ে ছোট হবে। এমন অসম সংখ্যা বা বিবৃতি প্রকাশের জন্য অসমতা ব্যবহার করা হয়।

$a > b$ একটি অসমতা এবং এর অর্থ a b–এর চেয়ে বড়।

$a < b$–এর অর্থ a b–এর চেয়ে ছোট। আবার

$a \not> b \Rightarrow a$ b এর চেয়ে বড় নয়। সেক্ষেত্রে a b এর চেয়ে ছোট অথবা b এর সমান হতে পারে এবং তা $a \leq b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অনুরূপভাবে $a \nless b \Rightarrow a \geq b$

অসমতার বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নরূপ ঃ

১. a এবং b দুইটি উপাদানের জন্য $a = b$, $a > b$ এবং $a < b$ এর যেকোন একটি সঠিক ;

২. $a > b$ এবং $b > c$ হলে $a > c$

৩. $a < b$ এবং $b < c$ হলে $a < c$

৪. $a > b$ হলে $a + c > b + c$

৫. $a < b$ এবং $a < c$ হলে $ac < bc$

৬. $a > b$ হলে $a = b + p$

৭. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ হলে $\frac{c}{a} < \frac{b}{d}$, বিশেষ করে $a > b$ হলে $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

৮. $a > b$ হলে $-a < -b$

৯. $a > b$ এবং $n > 0$ হলে $a^n > b^n$

এবং $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n}$

অসমতার সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে দুটি ধনাত্মক সংখ্যার গাণিতিক গড় (arithmatic mean) তাদের জ্যামিতিক গড়ের (geometric mean) সমান অথবা তার চেয়ে বড়।

ধরা যাক a এবং b দুটি ধনাত্মক সংখ্যা। তাদের গাণিতিক গড় $A = \frac{a+b}{2}$ এবং

জ্যামিতিক গড় $G = \sqrt{ab}$

$$\therefore A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \text{ কেন না বর্গমান } \geq 0$$

অর্থাৎ $A - G \geq 0$ $\quad\quad \therefore A \geq G$

৪.১ সমাধান কর : $x + 3 < 7$

সমাধান : $x + 3 < 7$ থেকে $x + 3 - 3 < 7 - 3$

বা, $x < 4$

৪.২ সমাধান কর : $2(x + 1) - 3(x - \frac{4}{3}) > 7x$

সমাধান : $2(x + 1) - 3(x - \frac{4}{3}) > 7x$

বা, $2x + 2 - 3x + 4 > 7x$

বা, $-x + 6 > 7x$

বা, $-x + x + 6 > 7x + x$

বা, $6 > 8x$

বা, $8x < 6$

বা, $x < \frac{3}{4}$

৪.৩ নিচের বিবৃতিসমূহ একটি অপরটির সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ কিনা দেখাও :

$x - y > 1, x < 0, y + 7 = 0$

সমাধান : $y + 7 = 0 \therefore y = -7$

আবার দেয়া আছে $x - y > 1$

বা, $x > y + 1$

বা, $x > -7 + 1$

বা, $x > -6$

এবং $x > -6$ ও $x < 0$ পরস্পরবিরোধী নয় (এখান থেকে বোঝা যায় x–এর সম্ভাব্য মান -6 এবং 0 এর মধ্যে অর্থাৎ $= 6 < x < 0$) অতএব বিবৃতিসমূহ সামঞ্জস্যপূর্ণ।

সমীকরণের চলকের মান নির্ণয়

এখানে সমীকরণ থেকে তার চলকের মান নির্ণয়ের কয়েকটি উদাহরণ দেয়া হবে। প্রথমে নেয়া হবে এক চলকের একঘাত সমীকরণ।

৪.৪ $2x - 7 = 6x + 2$ সমীকরণ থেকে x চলকের মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়াটি এরূপ ঃ

$2x - 7 = 6x + 2$

বা, $2x - 6x = 7 - 2$

বা, $-4x = 9$

$\therefore x = \frac{9}{-4} = -\frac{9}{4}$

৪.৫ $2x - \frac{3-x}{5} = \frac{x+4}{3} - 7$ সমীকরণে x–এর মান কত ?

সমাধান ঃ $2x - \frac{3-x}{5} = \frac{x+4}{3} - 7$

বা, $\frac{5 \times 2x - (3-x)}{5} = \frac{(x+4) - 3 \times 7}{3}$

বা, $\frac{10x - 3 + x}{5} = \frac{(x+4) - 3 \times 7}{3}$

বা, $\frac{11x - 3}{5} = \frac{x - 17}{3}$

বা, $3(11x - 3) = 5(x - 17)$

বা, $33x - 9 = 5x - 85$

বা, $28x = -76$

$\therefore x = \frac{-76}{28} = -\frac{19}{7}$

যুগপৎ সমীকরণ (Simultaneous Equation)

কোন রৈখিক সমীকরণের চলক সংখ্যা যদি দুটি হয় তবে সেই একটি সমীকরণ থেকে চলক দুটির নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় না। যেমন $2x + 3y = 6$ একটি সমীকরণ হলে তার x–এর প্রতিটি মানের জন্য y–এর আলাদা আলাদা মান থাকবে কিন্তু x এবং y–এর কোন একটি করে নির্দিষ্ট মান থাকবে না। তবে যদি দুই চলকের রৈখিক সমীকরণ একটি না হয়ে দুটি দেয়া থাকে তবে তাদের থেকে দুটি চলকেরই প্রতিটির একটি করে নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে। যেমন দুটি সমীকরণ

$3x + 2y = 8$ . . . (1)

$2y + 3y = 7$ . . . (2)

দেয়া থাকলে x এবং y–এর মাত্র একটি করেই মান পাওয়া যাবে।

(1) নং সমীকরণে x–এর মান যথাক্রমে 0, 1, 2, 3, 4 ইত্যাদি বসিয়ে x এবং y–এর মানের জন্য নিম্নরূপ ছক পাওয়া যায়

x	0	1	2	3	4	5
y	4	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{7}{2}$

এবং (2) নং সমীকরণ থেকে একইভাবে পাওয়া যায়

x	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1

ছক দুটি থেকে দেখা যাচ্ছে জুটিবদ্ধভাবে উভয় ছকে x এবং y–এর একই মান শুধু একটি ক্ষেত্রে এবং x, y–এর মানের এ জুটিটি হচ্ছে (2, 1) অতএব দুটি সমীকরণের সুনির্দিষ্টভাবে একটিই মাত্র সমাধান হচ্ছে

$x = 2$ এবং $y = 1$

অনুরূপভাবে সমীকরণের চলকের সংখ্যা তিন হলে তিনটি চলকের প্রতিটির জন্য একটি করে নির্দিষ্ট মান পাবার জন্য অন্তত তিনটি সমীকরণ থাকতে হবে।

এভাবে চলকের সংখ্যার সঙ্গে সমাঞ্জস্য রেখে নির্দিষ্ট সংখ্যক সমীকরণের সমষ্টিকে যুগপৎ সমীকরণ (Simaltaneous equation) বলে। নিচে কয়েকটি যুগপৎ সমীকরণের উদাহরণ দেয়া হল

৫.৬
$$3x + 2y = 5 \quad \ldots (1)$$
$$2x + 3y = 7 \quad \ldots (2)$$

$$(1) \times 2: \quad 6x + 4y = 10 \quad \ldots (3)$$
$$(2) \times 3: \quad 6x + 9y = 21 \quad \ldots (4)$$

$$(3) - (4): \quad -5y = -11 \qquad \therefore y = \frac{11}{5}$$

সমীকরণ (1) – এ $y = \frac{11}{5}$ বসিয়ে

$$3x + \frac{2.11}{5} = 5$$

বা, $3x = 5 - \frac{2.11}{5}$

$= \frac{3}{5}$ $\therefore\ x = \frac{3}{5 \times 3} = \frac{1}{5}$

৪.৭ x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর

$3x + y = 0$ . . . (1)

$2x + 3y - z = 8$ . . . (2)

$4x - y + 5z = 16$ . . . (3)

(1) থেকে $y = -3x$ . . . (4)

(2) এবং (3) - এ $y = -3x$ বসিয়ে,

$2x - 9x - z = 8$ বা, $-7x - z = 8$ . . . (5)

$4x + 3x + 5z = 16$ বা, $7x + 5z = 16$ . . . (6)

(5) এবং (6) সমাধান করে $x = -2$

$z = 6$

(4) এ x এর মান বসিয়ে $y = 6$

চলকের অপসারণ পদ্ধতিতে (elimination method) ভিন্নভাবেও সমীকরণগুলির সমাধান করা যায়।

$(2) \times 5$	$10x + 15y - 5z = 40$	. . . (4)
$(3) \times 1$	$4x - y + 5z = 16$	. . . (5)
$(4) + (5)$	$14x + 14y = 56$	

বা $x + y = 4$ . . . (6) (সমীকরণের উভয় পক্ষকে 14 দ্বারা ভাগ করে)

(1) এবং (6) থেকে $x = -2,\ y = 6$

(2) সমীকরণে x এবং y এর মান বসিয়ে $2(-2) + 3.6 - z = 8$

বা, $-4 + 18 - z = 8$

বা, $z = -4 + 18 - 8 = 6$

এবং উদ্দিষ্ট সমাধান $x = -2$

$y = 6$

$z = 6$

রৈখিক সমীকরণ ব্যবহার করে অনেক সমস্যারই সহজ সমাধান পাওয়া যায়। দুটি উদাহরণের মাধ্যমে তা দেখানো হল

৪.৮ একটি ব্যাগে দশ পয়সার মুদ্রা, পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা মিলিয়ে মোট 10 টাকা আছে। ব্যাগে পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা দশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যার অর্ধেক এবং পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার চেয়ে দুটি বেশী হলে কোন প্রকারের মুদ্রা কতটি আছে নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= x$

$\therefore$ দশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= 2x$ এবং

পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= x + 2$

সেক্ষেত্রে মোট টাকার পরিমাণ হবে

$$x \times .50 + 2x \times .10 + (x + 2) \times .25 = 10$$

বা, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x + \frac{x+2}{4} = 10$

বা, $\frac{19x + 10}{20} = 10$

বা, $19x + 10 = 200$

বা, $19x = 200 - 10 = 190$

$\therefore x = \frac{190}{19} = 10$

অর্থাৎ, পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= 10$

দশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= 2x = 2 \times 10 = 20$

এবং পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= x + 2 = 10 + 2 = 12$

৪.৯ একটি কারখানা দুটি পণ্য উৎপাদন করে। একটি পণ্যের একক প্রতি মূল্য 11.00 টাকা এবং অপরটির একক প্রতি মূল্য 25.00 টাকা। কারখানাটি কোন এক মাসে পণ্য দুটি বিক্রির ফলে মোট 26000.00 টাকা আয় করে। কোন কারণে পণ্য দুটির মূল্য একক প্রতি 2.00 টাকা হিসাবে বৃদ্ধি পেলে কারখানাটি পণ্য দুটির একই পরিমাণ বিক্রি থেকে পরবর্তী মাসে 29200.00 টাকা আয় করে। কারখানাটি প্রথম মাসে কোন পণ্যের কত পরিমাণ বিক্রি করেছিল?

সমাধান ঃ মনে করি পণ্য দুটির যেটির একক প্রতি মূল্য 11.00 টাকা তার পরিমাণ x এবং যেটির একক প্রতি মূল্য 25.00 টাকা তার পরিমাণ y

সেক্ষেত্রে $11x + 25y = 26000 \quad \ldots (1)$

আবার প্রতিটির মূল্য এককপ্রতি 2.00 হিসাবে বৃদ্ধি পেলে

$(11 + 2)x + (25 + 2)y = 29200$

বা, $13x + 27y = 29200 \quad \ldots (2)$

(1) এবং (2) সমীকরণ সমাধান করে $x = 1000$ এবং $y = 600$

অতএব 11.00 টাকা মূল্যের পণ্যের পরিমাণ = 1000 একক এবং

25.00 টাকা মূল্যের পণ্যের পরিমাণ = 600 একক

দ্বিঘাত সমীকরণ

দ্বিঘাত সমীকরণকে সাধারণভাবে $ax^2 + bx + c = 0$, যেখানে a, b এবং c তিনটি ধ্রুব এবং $a \neq 0$, দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এমন সমীকরণে যদি $b = 0$ হয় তবে তাকে বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ (pure quadratic equation) বলে। $x^2 - 4x = 8$, $x^2 - x - 6 = 0$, $a = 3bx - 3x^2$ ইত্যাদি দ্বিঘাত সমীকরণের একেকটি উদাহরণ। কোন কোন সময় প্রাথমিক পর্যবেক্ষণে একটি সমীকরণ দ্বিঘাত কিনা তা বলা যায় না। যেমন $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x} = 3$। সমীকরণটিকে ভিন্নভাবে উপস্থাপন করা যাক,

$\sqrt{5x-1} + \sqrt{x} = 3$

বা, $\sqrt{5x-1} = 3 - \sqrt{x}$

বা, $5x - 1 = 9 + x - 6\sqrt{x}$ (উভয় পাশকে বর্গ করে)

বা, $5x - x - 1 - 9 = -6\sqrt{x}$

বা, $4x - 10 = -6\sqrt{x}$

বা, $16x^2 - 80x + 100 = 36x$ (পুনরায় উভয় পাশকে বর্গ করে)

বা, $16x^2 - 116x + 100 = 0$

অর্থাৎ সমীকরণটি দ্বিঘাত

এখানে এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান কিভাবে করা যায় তা আলোচিত হবে (বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে একটি সাধারণ পদ্ধতি দেয়া হবে)।

$ax^2 + bx + c = 0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের সাধারণ সূত্রটি হচ্ছে ঃ

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

সমীকরণে চলকের মানসমূহকে সমীকরণের মূল (roots) বলা হয়।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের সংখ্যা দুটি। $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের একটিকে α এবং অপরটিকে β ধরা হলে

$$\alpha = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[$ax^2 + bx + c = 0$ উভয় পাশকে a দ্বারা ভাগ করলে

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ বা, } x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\text{বা, } x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\text{বা, } x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$]

লক্ষণীয় যে মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং গুণফল $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$\left[\ \alpha + \beta = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right.$$

$$= -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{a};$$

$$\alpha\beta = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a} \Big]$$

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের বৈশিষ্ট্য

দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলের প্রকৃতি নির্ভর করে $\sqrt{b^2 - 4ac}$ - এর সংখ্যাগত মানের উপর। এবং $\sqrt{b^2 - 4ac}$ কে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বৈশিষ্ট্য নির্ধারক (discriminant) বলে। এই বৈশিষ্ট্য নির্ধারককে সাধারণত গ্রীক অক্ষর Δ (ডেল্টা) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

১. যদি $\Delta > 0$ এবং Δ একটি যথার্থ বর্গমান (perfect square) হয় তবে $\sqrt{\Delta}$ মূলদ হবে। সেক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি মূল মূলদ সংখ্যা হবে ;

২. যদি $\Delta > 0$ হয় এবং Δ একটি যথার্থ বর্গমান না হয় তবে $\sqrt{\Delta}$ অমূলদ হবে। সেক্ষেত্রে দুটি মূলই অমূলদ হবে ;

৩. যদি $\Delta = 0$ হয় তবে $\sqrt{\Delta} = 0$। সেক্ষেত্রে দুটি মূলই বাস্তব এবং পরস্পরের সমান হবে ;

৪. যদি $\Delta < 0$ হয় তবে $\sqrt{\Delta}$ কাল্পনিক সংখ্যা হবে। সেক্ষেত্রে দুটি মূলই হবে জটিল সংখ্যা।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় অমূলদ কিংবা কাল্পনিক সংখ্যা হলে তারা অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হয়। অর্থাৎ একটি মূল $a + \sqrt{b}$ হলে অপরটি হবে $a - \sqrt{b}$ কিংবা একটি $a + bi$ হলে অপরটি হবে $a - bi$।

৪.১০ নিচের সমীকরণের মূল সম্পর্কে মন্তব্য কর ঃ

(ক) $x^2 + 5x + 9 = 0$ (খ) $2x^2 + x - 10 = 0$

সমাধান ঃ $x^2 + 5x + 9 = 0$ সমীকরণটিতে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের $a = 1$, $b = 5$ এবং $c = 9$

আবার, $b^2 - 4ac = 5^2 - 4.1.9$

এভাবে, মূলের বৈশিষ্ট্য নির্ধারক $\Delta = 5^2 - 4.1.9$

$= 25 - 36$

$= -11 < 0$

∴ মূলদ্বয় হবে কাল্পনিক এবং অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

(খ) $2x^2 + x - 10 = 0$ $\quad \Delta = 1^2 - 4.2(-10)$

$= 1 + 80$

$= 81$ একটি যথার্থ বর্গ সংখ্যা

∴ মূলদ্বয় হবে মূলদ সংখ্যা এবং একে অপরের থেকে আলাদা।

৪.১১ m-এর মান কত হলে নিচের সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পরের সমান হবে?

$(m + 1)x^2 + 2(m + 3)x + (2m + 3) = 0$

সমাধান ঃ $\Delta = \{2(m + 3)\}^2 - 4(m + 1)(2m + 3)$

$= 4(m^2 + 6m + 9) - 4(2m^2 + 5m + 3)$

$= 4m^2 + 24m + 36 - 8m^2 - 20m - 12$

$= -4m^2 + 4m + 24$

মূলদ্বয় পরস্পরের সমান হলে $\Delta = 0$

অর্থাৎ $-4m^2 + 4m + 24 = 0$

বা, $-m^2 + m + 6 = 0$

বা, $m^2 - m - 6 = 0$

বা, $(m - 3)(m + 2) = 0$

হয় $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

নতুবা $m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হতে হলে m এর মান হবে 3 অথবা -2।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে বিপরীত প্রক্রিয়ায় কোনো সমীকরণের মূল দেয়া থাকলে তাদের সাহায্যে সমীকরণ তৈরি করা যায়।

মূল α এবং β এর সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ কে

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ আকারে লেখা যায়; কিন্তু

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$; এখান থেকে $\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta)$

$\therefore \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

এটিই হবে মূল α এবং β এর সাহায্যে তৈরি উদ্দিষ্ট সমীকরণ।

৪.১২ কোনো সমীকরণের দুটি মূল 3 এবং 5 দেয়া থাকলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান : $\alpha = 3$ এবং $\beta = 5$

সমীকরণটি হবে $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 - (3 + 5)x + 3.5 = 0$

অর্থাৎ $x^2 - 8x + 15 = 0$

৪.১৩ $2x^2 - 4x + 1 = 0$ এর দুটি মূল α এবং β হলে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল $\alpha^2 + \beta$ এবং $\beta^2 + \alpha$ হবে।

সমাধান : $2x^2 - 4x + 1 = 0$ থেকে $\alpha + \beta = -\left(\frac{-4}{2}\right) = 2$

এবং $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

কোন সমীকরণের মূল $\alpha^2 + \beta$ এবং $\beta^2 + \alpha$ হলে সমীকরণটি হবে

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta + \beta^2 + \alpha)x + (\alpha^2 + \beta)(\beta^2 + \alpha) = 0$$

এখন $\alpha^2 + \beta + \beta^2 + \alpha = \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)$$

$$= 2^2 - 2.\frac{1}{2} + 2$$

$$= 5$$

$$(\alpha^2 + \beta)(\beta^2 + \alpha) = \alpha^2\beta^2 + \alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\beta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^3 - 3.\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{23}{4}$$

এবং উদ্দিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (\alpha^2 + \beta + \beta^2 + \alpha)\,x + (\alpha^2 + \beta)(\beta^2 + \alpha) = 0$ হবে

$x^2 - 5x + \frac{23}{4} = 0$ বা, $4x^2 - 20x + 23 = 0$

৪.১৪ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের একটি অপরটির 4 গুণ বড়। সমীকরণটির ধ্রুব C-এর মান 3 হলে তার দ্বিঘাত চলকের সহগ ও একঘাত চলকের সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

ধরা যাক, সমীকরণটির একটি মূল α, সেক্ষেত্রে অপর মূল হবে 4α এবং মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a}$ .... (1)

ও গুণফল $= \alpha.4\alpha = 4\alpha^2 = \frac{C}{a}$ .... (2)

যেখানে a = দ্বিঘাত চলকের সহগ,

b = একঘাত চলকের সহগ এবং

c = ধ্রুব

(1) থেকে $5\alpha = -\frac{b}{a}$ বা, $\alpha^2 = \frac{b^2}{25a^2}$

(2) থেকে $\alpha^2 = \frac{c}{4a}$ $\therefore \frac{b^2}{25a^2} = \frac{c}{4a}$

বা, $\frac{b^2}{25a^2} = \frac{3}{4a}$ $(\because c = 3)$

বা, $4ab^2 = 75a^2$

বা, $4b^2 = 75a$ এটিই সমীকরণটির দ্বিঘাত চলকের সহগ ও একঘাত চলকের সহগের সম্পর্ক নির্দেশ করে।

৪.১৫ কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল অপর মূল অপেক্ষা 4 বড় হলে সমীকরণটির সহগসমূহ ও ধ্রুবের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

ধরা যাক, সমীকরণটি হচ্ছে $ax^2 + bx + c = 0$

এর একটি মূল α হলে অপরটি $\alpha + 4$

মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + (\alpha + 4) = -\frac{b}{a}$ বা, $2\alpha + 4 = -\frac{b}{a}$ . . . (1)

এবং গুণফল $\alpha(\alpha + 4) = \frac{c}{a}$ বা, $\alpha^2 + 4\alpha = \frac{c}{a}$ . . . . (2)

(1) থেকে $\alpha = -\frac{b + 4a}{2a}$; (2) নং –এ α–এর মান বসিয়ে

$$\left(-\frac{b + 4a}{2a}\right)^2 + 4\left(-\frac{b + 4a}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

যেখান থেকে $b^2 - 16a^2 = 4ac$ এবং এটিই হচ্ছে সমীকরণের সহগসমূহ ও ধ্রুবের মধ্যে উদ্দিষ্ট সম্পর্ক।

৪.১৬ $\frac{2x}{x - 2} + \frac{3}{2 + x} = 1$ সমীকরণে x–এর মান কত ?

সমাধান ঃ

$$\frac{2x}{x - 2} + \frac{3}{2 + x} = 1$$

বা, $2x(2 + x) + 3(x - 2) = (x - 2)(2 + x)$

বা, $4x + 2x^2 + 3x - 6 = x^2 - 4$

বা, $4x + 2x^2 + 3x - 6 - x^2 + 4 = 0$

বা, $x^2 + 7x - 2 = 0$

$$\therefore \quad x = -\frac{7}{2.1} \pm \frac{\sqrt{7^2 - 4.1(-2)}}{2.1}$$

$$= -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{49 + 8}}{2}$$

$$= -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{57}}{2}$$

অর্থাৎ $x = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{57}}{2}$ এবং $-\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{57}}{2}$

৪.১৭ **সমাধান কর :**

ক. $9x^2 = 49$

খ. $6x^2 = 18x$

গ. $x^2 - 8x + 16 = 3\sqrt{x^2 - 8x + 6}$

ঘ. $y + \sqrt{y} = \frac{6}{25}$

ঙ. $\sqrt{\frac{x}{x + 16}} + \sqrt{\frac{x + 16}{x}} = \frac{25}{12}$

চ. $x^4 + 8x^2 + 1 = 5x\,(x^2 + 1)$

সমাধান :

ক. $9x^2 = 49$

বা, $(3x)^2 = 49$

বা, $3x = \sqrt{49}$

$= \pm 7$

$\therefore \quad x = \pm \frac{7}{3}$

খ. $6x^2 = 18x$

বা, $6x^2 - 18x = 0$

$\therefore \quad x = -\frac{-18}{2.6} \pm \sqrt{\frac{(-18)^2 - 4.6.0}{2.6}}$

$= \frac{18}{12} \pm \frac{18}{12}$

অর্থাৎ $x = \frac{18}{12} + \frac{18}{12} = 3,$

এবং $x = \frac{18}{12} - \frac{18}{12} = 0$

অন্যভাবে,

$6x^2 - 18x = 0$

$6x\,(x - 3) = 0$

হয় $6x = 0 \therefore x = 0$

নয়তো $x - 3 = 0 \therefore x = 3$

গ. $x^2 - 8x + 16 = 3\sqrt{x^2 - 8x + 16}$

মনে করি $x^2 - 8x + 16 = y$

$\therefore \quad y = 3\sqrt{y}$

বা, $\quad y - 3\sqrt{y} = 0$

বা, $\quad \sqrt{y}\,(y - 3) = 0$ হয় $\sqrt{y} = 0 \;\therefore\; y = 0$

নয়তো $\sqrt{y} - 3 = 0 \;\therefore\; \sqrt{y} = 3$ বা $y = 9$

এখন $\quad y = 0$ হলে

$x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \therefore\; x = \frac{8}{2} \pm \frac{\sqrt{64 - 64}}{2} = 4$

এবং $y = 9$ হলে

$x^2 - 8x + 16 = 9$

বা, $x^2 - 8x + 7 = 0 \;\therefore\; \frac{8}{2} \pm \frac{\sqrt{64 - 28}}{2} = 4 \pm 3$

$x = 7$ অথবা 1

অতএব x এর প্রাপ্ত মানসমূহ হবে $\quad x = 1$,

$x = 4$ অথবা

$x = 7$

(ঘ) $\quad y + \sqrt{y} = \frac{6}{25}$

বা, $\quad \sqrt{y} = \frac{6}{25} - y$

বা, $\quad y = \left(\frac{6}{25} - y\right)^2$

$= \frac{36}{625} - \frac{12}{25}\,y + y^2$

বা, $\quad y^2 - \frac{37}{25}\,y + \frac{36}{625} = 0$

$\therefore \quad y = \frac{37}{25.2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{37}{25}\right)^2 - 4.1.\frac{36}{625}}}{2}$

$$= \frac{36}{25} \text{ অথবা } \frac{1}{25}$$

(ঙ) $$\sqrt{\frac{x}{x+16}} + \sqrt{\frac{x+16}{x}} = \frac{25}{12}$$

ধরা যাক, $\frac{x}{x-16} = y^2$ সেক্ষেত্রে,

$$y + \frac{1}{y} = \frac{25}{12}$$

বা, $$\frac{y^2+1}{y} = \frac{25}{12}$$

বা, $12y^2 - 25y + 12 = 0$ $\quad \therefore y = \frac{25}{24} \pm \frac{\sqrt{625 - 4.144}}{24}$

$$= \frac{4}{3} \text{ অথবা } \frac{3}{4}$$

এবং $y^2 = \frac{16}{9}$ অথবা $\frac{9}{16}$

$y^2 = \frac{16}{9}$ হলে, $\frac{x}{x+16} = \frac{16}{9}$

বা, $9x = 16x + 256$

$$\therefore x = -\frac{256}{7}$$

$y^2 = \frac{9}{16}$ হলে, $\frac{x}{x+16} = \frac{9}{16}$

বা, $16x = 9x + 144$

বা, $x = \frac{144}{7}$ অর্থাৎ $x = -\frac{256}{7}$ অথবা $\frac{144}{7}$

চ. $x^4 - 8x^2 + 1 = 5x(x^2+1)$

বা, $x^4 + 8x^2 + 1 = 5x^3 + 5x$

বা, $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

বা, $x^4 - x^3 - 4x^3 + 4x^2 + 4x^2 - 4x - x + 1 = 0$

বা, $x^3(x-1) - 4x^2(x-1) + 4x(x-1) - 1(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0$

বা, $(x-1)\{x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + x - 1) = 0$

বা, $(x-1)\{x^2(x-1) - 3x(x-1) + 1(x-1)\} = 0$

বা, $(x-1)(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$ হয় $x - 1 = 0 \therefore x = 1$

নয়তো $x - 1 = 0 \therefore x = 1$

নয়তো $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9-4}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(উল্লেখ্য যে সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ মান 4 বলে সমীকরণটির চলকের জন্য 4 টি মান থাকবে এবং এই চারটি মান হচ্ছে

$1, 1, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ এবং $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$)

দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে চলকের সর্বোচ্চ মান দুটি বলে তার সমাধানের ফলে চলকের দুটি মান পাওয়া যায়।

ইতিপূর্বে যুগপৎ রৈখিক সমীকরণের সমাধান প্রক্রিয়া দেখানো হয়েছে। চলকের মান একাধিক হলেই যুগপৎ সমীকরণের প্রয়োজন হয়। কোন দ্বিঘাত সমীকরণেও একাধিক চলক থাকতে পারে। ধরা যাক, একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + by + c = 0$ দেয়া আছে। তার x এবং y এর নির্দিষ্ট মান নির্ণয় করতে হলে এই দুই চলকের অন্তত আরও একটি সমীকরণ প্রয়োজন। তবে সে সমীকরণটিকেও দ্বিঘাত হতে হবে এমন কোন বাধ্যবাধকতা নেই। উদাহরণের মাধ্যমে দু'টি চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান প্রক্রিয়া দেখানো হল :

৪.১৮ (প্রদত্ত দুটি সমীকরণের একটি দ্বিঘাত এবং অপরটি রৈখিক)

$3x - 2y = 12$ .... (1)

$y^2 + 2x - 5y = 28$ .... (2)

সমাধান : প্রথমে রৈখিক সমীকরণ থেকে যেকোন একটি চলককে অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

সমীকরণ 1 থেকে $x = \frac{12 + 2y}{3}$

প্রাপ্ত x–এর মান 2 সমীকরণে বসালে

$$y^2 + \frac{2(12+2y)}{3} - 5y = 28$$

বা, $3y^2 + 24 + 4y - 15y = 84$

বা, $3y^2 - 11y - 60 = 0$

$$\therefore \quad y = \frac{11}{6} \pm \frac{\sqrt{121 + 720}}{6}$$

$$= \frac{11}{6} \pm \frac{29}{6}$$

$$= \frac{40}{6} \text{ অথবা } -3$$

y–এর মান $\frac{40}{6}$ হলে (1) সমীকরণ থেকে $3x - \frac{2.40}{6} = 12$

বা $3x = 12 + \frac{80}{6}$

$= \frac{152}{6}$

$\therefore \; x = \frac{152}{18} = \frac{76}{9}$

এবং y-এর মান -3 হলে (1) সমীকরণ থেকে $3x - 2(-3) = 12$

বা, $3x + 6 = 12$

বা, $3x = 12 - 6$

$\therefore \; x = 2$

অতএব উদ্দিষ্ট সমাধান হবে $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 \end{array}\right\}$ এবং $\left.\begin{array}{l} x = \frac{76}{9} \\ y = \frac{40}{6} \end{array}\right\}$

৪.১৯ (দুটি সমীকরণই দ্বিঘাত)

$2x^2 + 4y^2 - 25 = 0$ .... (1)

$x^2 - 2y - 5 = 0$ .... (2)

সমাধান ঃ

$(1) \times 1 \qquad 2x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \qquad \ldots \qquad (3)$

$(2) \times 2 \qquad 2x^2 - 2y - 5 = 0 \qquad \ldots \qquad (4)$

$(3) - (4) \qquad 4y^2 + 4y - 15 = 0 \qquad \ldots \qquad (5)$

(5) থেকে $y = -\frac{4}{2.4} \pm \frac{\sqrt{16 + 4.4.15}}{2.4}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{16}{8}$

$= \frac{3}{2}$ অথবা $-\frac{5}{2}$

$y = \frac{3}{2}$ হলে (2) সমীকরণ থেকে $x^2 - 2.\frac{3}{2} - 5 = 0$

বা, $x^2 = 5 + 3$

$= 8$

$\therefore x = \pm 2\sqrt{2}$

$y = -\frac{5}{2}$ হলে (2) সমীকরণ থেকে $x^2 + 2.\frac{5}{2} - 5 = 0$

বা, $x^2 + 5 - 5 = 0$

বা, $x = 0$

অতএব উদ্দিষ্ট সমাধান হবে,

$$\left.\begin{array}{l} x = \pm 2\sqrt{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \text{ এবং } \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\frac{5}{2} \end{array}\right\}$$

উপরের উদাহরণে একটি সমীকরণ $ax^2 + by^2 + c = 0$ এবং অপরটি $ax^2 + by + c = 0$ আকারে দেয়া ছিল। এমন হতে পারে যে দুটি সমীকরণই $ax^2 + by^2 + c = 0$ আকারে দেয়া থাকবে। সেক্ষেত্রেও সমাধানের প্রক্রিয়া একই অর্থাৎ প্রথমে যেকোন একটি চলককে অপসারণ করতে হবে। কিন্তু যদি দুটি সমীকরণের উভয়েই অথবা তাদের যেকোন একটি $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$ আকারে দেয়া থাকে, সেক্ষেত্রে সমাধানের প্রক্রিয়া হবে কিছুটা ভিন্নরূপ। পরবর্তী উদাহরণটি লক্ষ্য কর ঃ

৪.২০ $x^2 + 3xy - 5 = 0$

$x^2 - y^2 = 3$

সমাধান ঃ

$$x^2 + 3xy - 5 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \ldots \quad (2)$$

প্রথমে $y = mx$ ধরে নিই। সেক্ষেত্রে সমীকরণ দুটির নতুন রূপ হবে

$x^2 + 3x\,(mx) - 5 = 0$ বা, $x^2 + 3mx^2 - 5 = 0 \ldots \quad (3)$

এবং $x^2 - m^2x^2 = 3$ বা, $x^2 - m^2x^2 - 3 = 0 \ldots \quad (4)$

(3) থেকে $x^2(1 + 3m) = 5 \quad \ldots \quad (5)$

(4) থেকে $x^2(1 - m^2) = 3 \quad \ldots \quad (6)$

(5) কে (6) দ্বারা ভাগ করলে $\dfrac{1 + 3m}{1 - m^2} = \dfrac{5}{3}$

বা, $5m^2 + 9m - 2 = 0$

$\therefore\ m = -2$ অথবা $\dfrac{1}{5}$

$m = -2$ হলে (4) থেকে $x^2 - 4x^2 - 3 = 0$

বা, $-3x^2 = 3$

বা, $x^2 = -1$

$\therefore\ x = \pm i$

$m = \dfrac{1}{5}$ হলে (4) থেকে $x^2 - \dfrac{x^2}{25} - 3 = 0$

বা, $\dfrac{24}{25}x^2 = 3$

বা, $x^2 = \dfrac{25}{8}\ \therefore\ x = \pm\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$

অর্থাৎ x এর প্রাপ্ত চারটি মান হবে,

$$\left.\begin{array}{l} x = i \\ x = -i \\ x = \dfrac{5}{2\sqrt{2}} \\ x = -\dfrac{5}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

যখন $m = -2$, $x = i$ এবং $-i$

$y = mx = -2i$ এবং $-2(-i)$ অর্থাৎ $2i$

যখন $m = \frac{1}{5}$; $x = \frac{5}{2\sqrt{2}}$ এবং $-\frac{5}{2\sqrt{2}}$

$y = mx = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}$ এবং $\frac{1}{5}\left(-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$

অর্থাৎ $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ এবং $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

অতএব x–এর মানের সঙ্গে y–এর মানের সঙ্গতি রেখে x এবং y–এর উদ্দিষ্ট মানসমূহ হবে

$$\left.\begin{array}{l} x = i \\ y = -2i \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} x = -i \\ y = 2i \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \text{ এবং } \left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{5}{2\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ

৪.২১ একটি শিল্পের চাহিদা সমীকরণ $p.q = 30$ এবং সরবরাহ সমীকরণ $2p + 17 = q$, যেখানে p = মূল্য এবং q = পণ্যের পরিমাণ। ঐ শিল্পের জন্য ভারসাম্য মূল্য ও পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

ভারসাম্য অবস্থায় উভয় সমীকরণের জন্য p এবং q এর মান সমান। অতএব উদ্দিষ্ট সমাধান হবে দুটি সমীকরণের জন্য p এবং q এর মান একই হলে যা হয় তাই অর্থাৎ

$pq = 30$ . . . . (1) এবং

$2p + 17 = q$ . . . . (2)

(2) সমীকরণ থেকে q এর মান (1) এ বসিয়ে

$$p(2p + 17) = 30$$

বা, $2p^2 + 17p - 30 = 0$ $\therefore p = \frac{17}{4} \pm \frac{\sqrt{(289 + 240)}}{4}$

$= \frac{3}{2}$ অথবা -10

কিন্তু মূল্য ঋণাত্মক হতে পারে না। অতএব ভারসাম্য মূল্য $= \frac{3}{2}$ মুদ্রা একক,

আবার (1) সমীকরণে p এর মান বসিয়ে,

$\frac{3}{2}q = 30$ বা, $Q = 20$ অর্থাৎ ভারসাম্য পরিমাণ = 20 একক।

৪.২২ একটি কারখানায় যতজন শ্রমিক ছিল শতকরা ঠিক তত হারে বৃদ্ধি পেয়ে শ্রমিকের সংখ্যা 96–এ উত্তীর্ণ হলে সেখানে প্রথমে কতজন শ্রমিক ছিল।

সমাধান ঃ

ধরা যাক, কারখানায় শ্রমিক ছিল x জন।

শতকরা x হারে বৃদ্ধি পেলে শ্রমিকের সংখ্যা হবে $\frac{x(100 + x)}{100}$ জন।

আবার,

$$\frac{x(100 + x)}{100} = 96$$

বা, $x^2 + 100x - 9600 = 0$

সমীকরণটি সমাধান করলে $x = 60$ অথবা $x = -160$

কিন্তু শ্রমিকের সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না, সুতরাং কারখানাটিতে প্রথমে শ্রমিক ছিল = 60 জন।

৪.২৩ চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 10,000 টাকা দুই বছরে 12,000 টাকায় দাঁড়াবে?

সমাধান ঃ

মনে করি সুদের হার x %

10000 টাকা 2 বছরে সুদ-আসলে হবে $10000\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$

এবং $10000\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 12000$

বা, $10\left(1+\frac{x^2}{10000}+\frac{x}{50}\right) = 12$ (উভয় পক্ষকে 1000 দিয়ে

বা, $10000 + x^2 + 200x = 12000$ ভাগ করে)

বা, $x^2 + 200x - 2000 = 0$

$\therefore\ x = -\frac{200}{2} \pm \frac{\sqrt{40000+8000}}{2}$

$= -100 \pm 20\sqrt{30}$

$= -100 \pm 109.55$

অর্থাৎ x = 9.55 অথবা − 209.55, কিন্তু সুদের হার ঋণাত্মক হয় না ; অতএব x = 9.55 বা সুদের হার = 9.55%

অনুশীলনী -- ৪

১. সমীকরণের ঘাত বলতে কি বুঝায়? ত্রিচলকবিশিষ্ট একটি করে দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের উদাহরণ দাও।

২. রৈখিক ও দ্বিঘাত সমীকরণের মধ্যে পার্থক্য কি?

৩. দ্বিচলকবিশিষ্ট একটি রৈখিক সমীকরণ দেয়া থাকলে তা থেকে চলকদ্বয়ের নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় কি? কেন? যুগপৎ সমীকরণ কি? তার উপযোগিতা দেখাও।

৪. বাণিজ্যিক সমস্যা সমাধানে যুগপৎ এবং দ্বিঘাত সমীকরণ সাহায্য করতে পারে কি? কিভাবে?

৫. দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$ এবং অপরটি $ax^2 + by^2 = 0$ আকারে দেয়া থাকলে তার সমাধান কিভাবে করা যায় উদাহরণের মাধ্যমে বর্ণনা কর।

৬. **সমাধান কর ঃ**

ক. $a^2x - a^2 + 3 = ax + 6x - 2a$

খ. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{-5}{4(x^2 - x)}$

গ. $3\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-3} = 3\sqrt{x+4}$

ঘ. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 7$

ঙ. $\frac{x-1}{2} + \frac{2y+1}{3} = 0$

$\frac{2x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 0$

চ. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-1} = 2$

$\frac{48}{x-1} + \frac{32}{y-1} = 13$

ছ. $2x - y + 3z = 0$

$x + 2y - 2z = 5$

$3x - 3y + z = 1$

জ. $x^2 + 2y^2 = 2$

$x^2 - y - 1 = 0$

ঝ. $2x^2 + 3xy + 2y^2 = -1$

$x^2 + 2xy + 3y^2 = -2$

ঞ. $\frac{9x-2}{3} + \frac{4x^2-7}{4x^2+3} = \frac{6x-1}{2}$

৭. একটি গাড়ি স্টার্ট নেওয়ার পর প্রথম ঘণ্টায় 60 কিলোমিটার চলার পর পরবর্তীতে প্রতি ঘণ্টায় 50 কিলোমিটার হিসাবে চলে। গাড়িটি ঘণ্টার মাপে নির্দিষ্ট সময়ে কতদূর অতিক্রম করবে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

৮. একটি পণ্যের চাহিদা রেখার সমীকরণ $D = \frac{8p}{p+2}$ এবং সরবরাহ রেখার সমীকরণ $S = p^2$। বিনিময়কৃত পণ্যের ভারসাম্য পরিমাণ এবং ভারসাম্য মূল্য নির্ধারণ কর।

৯. একটি দোকানের দুজন কর্মচারীকে মাসিক মোট 3000 টাকা দিতে হয়। তাদের একজনের বেতন 10% এবং অপরজনের বেতন 15% বাড়াতে হলে প্রতি মাসে অতিরিক্ত 360 টাকা লাগে। কর্মচারীদ্বয়ের বর্তমান মাসিক বেতন কত?

১০. মজুরি শ্রমিক দিয়ে একটি পণ্য উৎপাদন করতে শ্রম ব্যয় হয় 9 একক এবং পুঁজি ব্যয় হয় 6 একক এবং তার মোট উৎপাদন ব্যয় 126 টাকা। 7 একক শ্রম ও 7 একক পুঁজি দিয়ে উৎপাদন করলে মোট ব্যয় হয় 119 টাকা। প্রতি একক শ্রম ও পুঁজির মূল্য কত?

১১. একটি স্পীডবোট স্থির পানিতে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার গতিতে চলে। যদি সমান পরিমাণ সময়ে বোটটি স্রোতের অনুকূলে 24 কিলোমিটার এবং প্রতিকূলে 14 কিলোমিটার অতিক্রম করে তবে স্রোতের গতিবেগ কত?

১২. একটি পণ্যের চাহিদা বিধি $p = m\sqrt{x} + n$ যেখানে p = পণ্যের একক প্রতি মূল্য, x – পণ্যের পরিমাণ, m ও n — দুটি ধ্রুব। মূল্য এক একক হলে চাহিদা 100 একক এবং চাহিদা 16 একক হলে বিক্রিলব্ধ আয় 144 একক। m এবং n–এর মান নির্ণয় কর। $p = 2$ একক হলে মোট বিক্রিলব্ধ আয় কত হবে?

১৩. চাহিদা এবং সরবরাহের সমীকরণ যথাক্রমে $D = 17 - 4p - p^2$ এবং $S = 4p - 3$। ভারসাম্য পরিমাণ ও ভারসাম্য মূল্য নির্ণয় কর।

১৪. দুটি পণ্য A এবং B–এর চাহিদা সমীকরণ নিম্নরূপ : $D_A = 10 - P_A - 2P_B$ এবং $D_B = 6 - P_A - P_B$। তাদের সরবরাহ সমীকরণ হচ্ছে $S_A = -3 + P_A + P_B$ এবং $S_B = -2 + P_B$ (D_A এবং D_B যথাক্রমে A এবং B এর চাহিদা ; S_A, S_B – A এবং B এর সরবরাহ ; P_A, P_B – A এবং B এর একক প্রতি মূল্য)। পণ্যদ্বয়ের ভারসাম্য মূল্য এবং বিনিময়কৃত ভারসাম্য পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৫. অতিরিক্ত চাহিদা পদ্ধতির মাধ্যমে ভারসাম্য নির্ণয় কর :

$$Q_d = 40 - \frac{5P}{7} \text{ এবং } Q_s = 8 - \frac{2P}{3}$$

পঞ্চম অধ্যায়

অপেক্ষক
[FUNCTIONS]

অপেক্ষক হচ্ছে দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ধারণের একটি মাধ্যম। কোন ছাত্রাবাসের একটি মেসের মাসিক মোট ব্যয়ের কথা ধরা যাক মেসের মোট সদস্য সংখ্যা একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা পর্যন্ত সীমাবদ্ধ থাকলে মেসের ম্যানেজার, বাবুর্চি ও বেয়ারাদের মোট বেতন বাবদ ব্যয় সদস্য সংখ্যার ওঠানামা নির্বিশেষে একই পরিমাণ থাকবে অর্থাৎ এই ব্যয়টিকে স্থিরীকৃত ব্যয় (fixed expenditure) হিসাবে ধরা যায়। কিন্তু বাজার খরচ বাবদ ব্যয় সদস্য সংখ্যার কমবেশির ওপর ওঠানামা করবে বলে মেসের মোট ব্যয়ের এই অংশকে পরিবর্তনশীল ব্যয় (variable expenditure) হিসাবে ধরা যায়। তবে এই পরিবর্তনশীল ব্যয়ের মোট পরিমাণ হবে সদস্য প্রতি ব্যয়ের পরিমাণ এবং সদস্য সংখ্যার গুণফলের সমান। অর্থাৎ মেসটির সদস্যসংখ্যা x, সদস্য প্রতি বাজার খরচ বাবদ ব্যয় a এবং স্থিরীকৃত ব্যয়ের পরিমাণ c হলে মেসের মোট ব্যয় y–কে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$y = ax + c$$

প্রদত্ত সমীকরণটি দুটি চলক x এবং y–এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ধারণ করে এবং y–এর মান x–এর উপরে সমীকরণ দ্বারা নির্ধারিত প্রকৃতিতে নির্ভরশীল। অপেক্ষকের সংজ্ঞানুযায়ী প্রদত্ত সমীকরণটি প্রকাশ করে যে y x–এর একটি অপেক্ষক, বা সাংকেতিকভাবে

$y = f(x)$, যেখানে x স্বাধীন চলক (independent variable) এবং y নির্ভরশীল চলক (dependent variable)। দুটি চলক x এবং y–এর মধ্যে যদি এমন কোন সম্পর্ক দেয়া থাকে যখন x–এর প্রতিটি নির্ধারিত মানের জন্য y–এর এক বা একাধিক নির্দিষ্ট মান অথবা নির্ধারিত মানসীমা পাওয়া যায় তবে প্রদত্ত সম্পর্কে y কে x–এর একটি অপেক্ষক বলে।

কোন চলকের মান অন্য একাধিক চলকের উপর নির্ভরশীল হতে পারে। যেমন, একটি পণ্যের চাহিদা নির্ভর করে পণ্যটির মূল্য, ক্রেতাদের আয় এবং রুচি কিংবা পণ্যটির প্রতিস্থাপক অন্যান্য পণ্যের মূল্য ইত্যাদির উপর। কোন পণ্য x–এর চাহিদা D_x দ্বারা

প্রকাশ করলে এবং পণ্যটির মূল্য P, ক্রেতাসমূহের আয় I এবং পণ্যটির প্রতিস্থাপক অন্য দুটি পণ্য x_1–এবং x_2–এর মূল্য যথাক্রমে P_1 এবং P_2 হলে

$$D_x = f(P, I, P_1, P_2) \text{ অর্থাৎ}$$

x পণ্যের চাহিদা তার মূল্য P, ক্রেতাদের আয় I এবং পণ্যটির প্রতিস্থাপক অন্য দুটি পণ্য x_1 এবং x_2–এর মূল্য P_1 এবং P_2–এর অপেক্ষক।

কোন অপেক্ষক $P = f(x)$

$= x^2 - 1$ লেখা হলে তার অর্থ হবে x–এর যে কোন মানের জন্য $P = x^2 - 1$ অর্থাৎ অপেক্ষকটি হচ্ছে P এবং x–এর মধ্যকার সার্বজনীন রূপ।

কোন চলক x-এর অপেক্ষককে $f(x)$ ছাড়াও $F(x)$, $\phi(x)$ ইত্যাদিরূপেও প্রকাশ করা হয়। লক্ষণীয় যে অপেক্ষককে সাধারণত সমীকরণ আকৃতিতে লেখা হয়; যেমন

$$Q = F(p) = p^2 + 3p - 7$$

$$V = \phi(t) = t^3 - 2t^2 + 1$$

$$F = (x, y) = x^2 + 3x - 2xy - 6x^2 - 7 \text{ ইত্যাদি।}$$

গঠন ও প্রকৃতি অনুযায়ী অপেক্ষক বিভিন্ন প্রকার হতে পারে। এখানে কতিপয় প্রকারভেদ আলোচনা করা হল।

একমান (One valued), **দ্বিমান** (Two valued) **এবং বহুমান** (Multiple valued) **অপেক্ষক ঃ**

কোন অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের প্রতিটি মানের জন্য যদি নির্ভরশীল চলকের মাত্র একটি মান থাকে তবে তাকে একমান অপেক্ষক বলে। যেমন $y = x^2$, $p = 3x + 2$ ইত্যাদি। পক্ষান্তরে $y = \sqrt{x}$ একটি দ্বিমান অপেক্ষক কেননা এতে স্বাধীন চলক x–এর প্রতিটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের $+\sqrt{x}$ এবং $-\sqrt{x}$ এই দুটি মান আছে। এভাবে যে অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের একটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের দুয়ের অধিক মান থাকে তাকে বহুমান অপেক্ষক বলে।

ব্যক্ত (Explicit) **এবং অব্যক্ত** (Implicit) **অপেক্ষক ঃ**

কোন অপেক্ষকে যদি স্বাধীন চলকের সঙ্গে নির্ভরশীল চলকের সম্পর্ক সরাসরি স্পষ্টভাবে দেখানো থাকে তবে তাকে ব্যক্ত অপেক্ষক বলা হয়। যেমন

$y = x^2 + 5x - 6$; $y = x^3 + 3$ ইত্যাদি। আবার যদি অপেক্ষকের প্রকাশরূপ এমন হয় যে তাতে স্বাধীন চলকের সঙ্গে নির্ভরশীল চলকের সম্পর্ক সরাসরি দেখা যায় না তবে তাকে অব্যক্ত অপেক্ষক বলে। যেমন,

$x + 5y = 3$; $x^2 + y^2 = 16$ ইত্যাদি।

তবে অব্যক্ত অপেক্ষককে ব্যক্ত অপেক্ষকে রূপান্তরিত করা সহজ। যেমন

$$x - 5y = 3 \quad \Rightarrow \quad -5y = -x + 3$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{5}(x - 3)$$
$$x^2 + y^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 16 - x^2$$
$$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

বীজগাণিতিক (Algebraic) **এবং অবীজগাণিতিক** (Non-algebraic) **অপেক্ষক ঃ**

কোন অপেক্ষকের পদসমূহের সংখ্যা সীমিত হলে এবং চলকসমূহের মান যোজন, বিয়োজন, পূরণ, বিভাজন কিংবা ঘাত বা মূল নির্ধারণ দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হলে তাকে বীজগাণিতিক অপেক্ষক বলা হয়। যেমন

$$y = x^2 - 2x + 5\ ;\ y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^3} \text{ ইত্যাদি।}$$

কিন্তু অনেক অপেক্ষকে চলকসমূহের মান উপর্যুক্ত কয়েকটি বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার বাইরে ত্রিকোণমিতি (trigonometry) সংবর্গমান (logarithm), ধারানুক্রমিক সূচক (exponential) ইত্যাদি জড়িত প্রক্রিয়া দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়। এ ধরনের সকল অপেক্ষককে সাধারণভাবে অবীজগাণিতিক অপেক্ষক বলে। গণিতশাস্ত্রের ভাষায় এদের নাম তুরীয় (transcendental) অপেক্ষক। তবে প্রকৃতি অনুযায়ী তাদের নিজস্ব আলাদা আলাদা নামে চিহ্নিত করা হয়। যেমন,

$y = \cos x$ একটি ত্রিকোণমিতিক (trigonometric) অপেক্ষক ;

$y = \log x$ একটি সংবর্গমান (logarithmic) অপেক্ষক ;

$y = e^x$ একটি ধারানুক্রমিক সূচক (exponential) অপেক্ষক ;

$y = e^{-x}$ একটি ব্যস্ত (inverse) অপেক্ষক।

মূলদ (Rational) **এবং অমূলদ** (Irrational) **অপেক্ষক ঃ**

কোন চলক x–এর একটি অপেক্ষক যদি ax^n–এর মাধ্যমে প্রকাশিত হয় যেখানে a একটি ধ্রুব এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা তবে অপেক্ষকটিকে x–এর মূলদ অপেক্ষক বলে। যেমন,

$$y = 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 9x + 7, \qquad y = 3x^3 - 2$$

মূলদ অপেক্ষকের বিবৃতিতে পদের সংখ্যা দুয়ের অধিক হলে এবং স্বাধীন চলকের সংখ্যা মাত্র একটি (x) হলে তাকে x–এর বহুপদী (Polynomial) অপেক্ষক বলে। সাধারণভাবে

$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots\dots\dots + a_m$ একটি বহুপদী অপেক্ষক যেখানে a_0, $a_1, a_2, \dots\dots a_m$ একেকটি ধ্রুব এবং m—বহুপদী অপেক্ষকের ঘাত।

মূলদ অপেক্ষক ভগ্নাংশ আকারেও থাকতে পারে যেমন,

$$y = \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 5};\quad y = \frac{3x^2 + 2x + 5}{(x + 1)(x + 3)}$$ ইত্যাদি।

যে সকল ক্ষেত্রে অপেক্ষকের বিবৃতির পদসমূহের বর্গমূল, ঘনমূল, ইত্যাদি নির্ধারণের প্রয়োজন থাকে সেগুলিকে অমূলদ অপেক্ষক বলা হয়। যেমন,

$y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x^2 - 2} + 3x + 5$ ইত্যাদি।

একধারা অপেক্ষক (Montone) অপেক্ষক

যখন কোন অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে নির্ভরশীল চলকেরও মান বৃদ্ধি পেতে থাকে তখন তাকে একধারা বর্ধিষ্ণু (monotonically increasing) এবং স্বাধীন চলকের মান বৃদ্ধির সঙ্গে নির্ভরশীল চলকের মান হ্রাস পেতে থাকলে অপেক্ষককে একধারা ক্ষয়িষ্ণু (monotonically decreasing) অপেক্ষক বলে।

পণ্যের মূল্য যদি P দ্বারা, সরবরাহ S দ্বারা এবং চাহিদা D দ্বারা চিহ্নিত করা হয় তবে

$D = f(P)$ একটি একধারা ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক কিন্তু

$S = F(P)$ একটি একধারা বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক।

সমরূপ (Even) ও বিরূপ (odd) অপেক্ষক ঃ

যদি x–এর কোন অপেক্ষক $y = f(x)$ এমন হয় যে $f(x) = f(-x)$ তবে তাকে সমরূপ অপেক্ষক বলে। যেমন

$y = x^2$; $y = 3x^2 + \cos x$; $y = 7x^2$ ইত্যাদি।

পক্ষান্তরে কোন অপেক্ষক $f(x)$ এর জন্য $f(-x) = -f(x)$ হলে তাকে বিরূপ অপেক্ষক বলা হয়। যেমন

$y = x^3$; $y = 3x + 2x^3$, $y = \sin x$ ইত্যাদি।

যৌগিক (Composite) অপেক্ষক

$y = F(k)$ এবং $k = f(x)$ দুটি অপেক্ষকের জন্য

$y = F[f(x)]$ একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক বা একটি যৌগিক অপেক্ষক।

$y = \sqrt{3x^2 - 7}$ একটি অপেক্ষক কে যৌগিক অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করার জন্য ধরা যাক $3x^2 - 7 = u$, সেক্ষেত্রে

$$y = \sqrt{u} \qquad \rightarrow \qquad y = f(u) = F\{f(x)\}$$

কোন উৎপাদন প্রতিষ্ঠানের পণ্যের মোট বিক্রয়ের পরিমাণ S পণ্যটির চাহিদা D–এর অপেক্ষক অর্থাৎ $S = F(D)$; আবার চাহিদা পণ্যটির মূল্য P–এর অপেক্ষক অর্থাৎ $D = f(P)$

$$\therefore\ S = F\{f(P)\}$$

নিরবিচ্ছিন্ন (Continuous) এবং সবিরাম (discontinuous) অপেক্ষক

অপেক্ষকের এই দুটি প্রকারভেদের সঙ্গে পরিচয়ের জন্য প্রথমে অপেক্ষকের সীমা (limit) সম্পর্কে ধারণা রাখা প্রয়োজন। কোন অপেক্ষকের সীমা বলতে একটি স্থির মান বোঝায় এবং অপেক্ষকটির স্বাধীন চলক কোন নির্দিষ্ট মানের যত কাছাকাছি আসতে থাকে, নির্ভরশীল চলক এই স্থির মানের তত কাছাকাছি আসে।

কোন অপেক্ষক $f(x)$ এর চলক x a এর কাছাকাছি অগ্রসর হতে থাকলে যদি তার সীমাকে l দ্বারা প্রকাশ করা হয় তবে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র যেকোন মান $\in$ (এপসিলন)–এর জন্য অপর একমন একটি ক্ষুদ্র মান $\delta = |f(x) - l|$ পাওয়া যাবে যে x a–এর যতই কাছে আসুক $\delta < \in$ হবে।

অন্য কথায়, কোন ধনাত্মক সংখ্যা $\in$ যত ক্ষুদ্রই হোক যদি এমন একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা δ পাওয়া যায় যে x–এর সকল মানের জন্য $\delta = |f(x) - l| < \in$ এবং $|x - a| < \delta$ তবে বলা যায় যে x a–এর কাছাকাছি আসতে থাকলে $f(x)$ তার সীমা l এর কাছাকাছি আসবে গাণিতিকভাবে, এই সীমাকে নিম্নরূপে লেখা হয় ঃ

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

উল্লেখ্য যে $f(x)$ l–এর একেবারে সমান নাও হতে পারে।

$f(x) = x^2 - 1$ একটি অপেক্ষকের জন্য সহজেই অনুমেয় যে, x–এর মান 2–এর যত কাছে আসবে $f(x)$–এর মান $2^2 - 1 = 3$–এর তত কাছে আসবে। সেক্ষেত্রে

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$$

উদাহরণে x–এর মান 2–এর দিকে এমনভাবে অগ্রসর হতে পারে যে 2–এর কাছাকাছি x–এর মানকে a দ্বারা চিহ্নিত করলে সর্বদাই 2 – a = ধনাত্মক হবে অথবা সর্বদাই 2 – a = ঋণাত্মক হবে।

2 – a ধনাত্মক হলে $a < 2$ এবং $f(x) < 2$ হবে। আবার 2 – a ঋণাত্মক হলে $a > 2$ এবং $f(x) > 2$ হবে। নিচের তালিকাটি লক্ষ্য কর ঃ

$x = 1.99$ $\quad f(x) = 2.9601$

$x = 1.999$ $\quad f(x) = 2.996001$

$x = 1.9999$ $\quad f(x) = 2.99960001$

আবার,

$x = 2.01$ $\quad f(x) = 3.0401$

$x = 2.001$ $\quad f(x) = 3.004001$

$x = 2.0001$ $\quad f(x) = 3.00040001$

ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র $(2 - a) = +\in$ বা $(2 - a) = -\in$ উভয় ক্ষেত্রেই $f(x) \to 3$ কিন্তু সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে চলকের নির্দিষ্ট মানের দিকে অগ্রসর হবার এই পার্থক্যটি বিবেচনা করা হয়। দুক্ষেত্রে

$\lim\limits_{x \to 2-} (x^2 - 1)$ এবং $\lim\limits_{x \to 2+} (x^2 - 1)$ লেখা হয়।

$\lim\limits_{x \to 2-} (x^2 - 1)$ এর অর্থ x এর মান 2 দিকে অগ্রসর হতে থাকলে কিন্তু

সর্বদা 2–এর কম থাকলে $f(x) = x^2 - 1$ এর সীমা নির্ধারণ। এটিকে বলা হয় বাম দিক থেকে সীমা (left hand side limit) নির্ধারণ। পক্ষান্তরে $\lim\limits_{x \to 2+} (x^2 - 1)$ হচ্ছে ডান দিক থেকে সীমা (right hand side limit) নির্ধারণ।

সীমা নির্ধারণের প্রক্রিয়ায় এই ধারণা দুটির গুরুত্ব সমধিক।

৫.১ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 2}{4x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ বাম দিক থেকে

$\lim\limits_{x \to 3-} \dfrac{x^2 + 2}{4x} = \lim\limits_{x \to 3 - h} \dfrac{x^2 + 2}{4x}$ যেখানে h একটি অতি ক্ষুদ্র

মান

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3-h)^2 + 2}{4(3-h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{11 - 6h + h^2}{12 - 4h}$$

$$= \frac{11}{12}$$ ($\because$ h এর অতি ক্ষুদ্র মানের জন্য $-6h + h^2 = 0$ এবং $4h = 0$)

এবং $\lim_{x \to 3+} \frac{x^2+2}{4x} = \lim_{x \to 3+h} \frac{x^2+2}{4x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 + 2}{4(3+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{11 + 6h + h^2}{12 + 4h}$$

$$= \frac{11}{12}$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{x^2+2}{4x} = \frac{11}{12}$$

কোন অপেক্ষক $f(x)$ একটি নির্দিষ্ট $x = a$ বিন্দুতে নিরবিচ্ছিন্ন হয় যদি

$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a+} f(x)$ হয়।

৫.২ প্রমাণ কর যে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ একটি নিরবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক

সমাধান ঃ $f(2) = 3.2^2 + 2.2 - 1$

$= 15$

$$\lim_{x \to 2-} (3x^2 + 2x - 1) = \lim_{h \to 0} \left\{ 3(2-h)^2 + 2(2-h) - 1 \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ 3(4 - 4h + h^2) + 4 - 2h - 1 \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ 12 - 12h + 3h^2 + 4 - 2h - 1 \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ 15 - 14h + 3h^2 \right\}$$

$$= 15$$

অনুরূপভাবে

$$= \lim_{x\to 2+} (3x^2 + 2x - 1) = \lim_{h\to 0} \left\{ 3(2+h)^2 + 2(2+h) - 1 \right\}$$

$$= 15$$

$$\therefore \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2+} f(x)$$

এবং $x = 2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি নিরবিচ্ছিন্ন।

৫.৩ $f(x) = \frac{|x|}{x}$; $x \neq 0$ এবং

$f(x) = 0$, $x = 0$ অপেক্ষকের নিরবিচ্ছিন্নতা সম্পর্কে মন্তব্য কর।

সমাধান ঃ

$f(x)$ কে নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায়।

$f(x) = 1$ যখন $x > 0$

$f(x) = 0$ যখন $x = 0$

$f(x) = -1$ যখন $x < 0$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+h} \frac{|x+h|}{x+h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|}{0+h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-h} \frac{|x-h|}{x-h}$$

$$= \lim_{-0-h} \frac{|0-h|}{0-h} = \frac{h}{-h} = -1$$

$f(0) = 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x) \neq f(0) \neq \lim_{x\to 0+}$$

এবং $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সবিরাম অর্থাৎ নিরবিচ্ছিন্ন নয়।

অর্থনীতি ও বাণিজ্যশাস্ত্রে ব্যবহৃত কতিপয় অপেক্ষকের নমুনা

(ক) চাহিদা অপেক্ষক (Demand function) ঃ অন্য সকল শর্ত এক হলে পণ্যের চাহিদা (D) তার মূল্য (P) বৃদ্ধির সঙ্গে বিপরীত সম্পর্কযুক্ত অর্থাৎ মূল্য বৃদ্ধি পেলে চাহিদা হ্রাস পায় এবং মূল্য হ্রাস পেলে চাহিদা বৃদ্ধি পায়। এক্ষেত্রে পণ্যের চাহিদা তার মূল্যের একটি অপেক্ষক এবং তাকে

$D = f(P)$ হিসাবে দেখানো যায়।

চাহিদার পরিমাণ Q_d হলে মূল্য P–এর সঙ্গে তার সম্পর্ককে বিভিন্ন সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। যেমন

$Q_d = 40 - \frac{3P}{2}$; $Q_d = \frac{7P}{P - 2}$ ইত্যাদি।

চাহিদা অপেক্ষকের গঠন চাহিদা বিধির সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ হবে। যেমন উপরের উদাহরণে

$Q_d = 40 + \frac{3P}{2}$ হলে তার গ্রহযোগ্যতা প্রশ্নসাপেক্ষ হত। মূল্য ঋণাত্মক হতে পারে না বলে এই অপেক্ষক যে P–এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে Q_d–এর মানের বৃদ্ধি দেখায় তা অস্বাভাবিক। চাহিদা বিধির ব্যতিক্রমের কারণে এ ধরনের চাহিদা অপেক্ষক সম্ভব। তবে উপযুক্ত ব্যাখ্যা না থাকলে চাহিদা অপেক্ষক হিসাবে $Q_d = 40 + \frac{3P}{2}$ গ্রহণ করা যায় না।

(খ) সরবরাহ অপেক্ষক (Supply function) ঃ এই অপেক্ষক সরবরাহ বিধির সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ এবং পণ্যের সরবরাহের পরিমাণ Q_s এবং পণ্যের মূল্য P হলে

$Q_s = f(P)$। উদাহরণ হিসাবে

$Q_s = 8 + \frac{2P}{3}$; $Q_s = 2P - 1$ ইত্যাদি দেখানো যায়।

চাহিদা ও সরবরাহ (যথাক্রমে Q_d এবং Q_s) উভয়েই P–এর অপেক্ষক এবং উভয় অপেক্ষক থেকে ভারসাম্য মূল্য (equilibrium price) এবং ভারসাম্য পরিমাণ (equilibrium quantity) নির্ধারণ করা যায়। যেমন,

$Q_s = 8 + \frac{2P}{3}$ এবং

$Q_d = 40 - \frac{3P}{2}$ দেয়া থাকলে ভারসাম্য অবস্থায়

$Q_s = Q_d$ অর্থাৎ

$8 + \frac{2P}{3} = 40 - \frac{3P}{2}$ যেখান থেকে ভারসাম্য মূল্য $P = 14\frac{10}{13}$ (পণ্যের একক প্রতি মূল্য টাকায় দেয়া থাকলে প্রদত্ত ক্ষেত্রে $P = 14\frac{10}{13}$ টাকা বা 14.77 টাকা)

ভারসাম্য পরিমাণ $Q_s = Q_d = 8 + \frac{2}{3}\left(14\frac{10}{13}\right)$

$= 17\frac{11}{13}$

(গ) উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক (Cost of production function) কোন পণ্যের উৎপাদনের পরিমাণ x হলে উৎপাদন ব্যয় C x-এর অপেক্ষক হবে অর্থাৎ $C = f(x)$। তবে উৎপাদনের মোট ব্যয় স্থিরীকৃত এবং পরিবর্তনশীল ব্যয়ের সমষ্টি বলে $f(x) = m + ax$, যেখানে m = স্থিরীকৃত ব্যয় এবং a = একক প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয়, উৎপাদন অপেক্ষক কে

$C = ax + m$ হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

(ঘ) মোট আয় অপেক্ষক (Total revenue function) ঃ পণ্য উৎপাদনকারী x পরিমাণ পণ্য উৎপাদনের পর একক প্রতি p মূল্যধরে বিক্রি করলে তার মোট বিক্রয়লব্ধ আয় হবে p.x এবং সেক্ষেত্রে মোট আয় অপেক্ষক $R(x) = p.x$

মোট আয় অর্থাৎ বিক্রয়লব্ধ আয় অপেক্ষক এবং উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক দেয়া থাকলে তাদের থেকে মুনাফা অপেক্ষক (Profit function) পাওয়া যায়। যেহেতু মুনাফা = বিক্রয়লব্ধ আয় − উৎপাদন ব্যয়,

মুনাফা অপেক্ষক $\pi(x) = R(x) - C(x)$

যেমন, কোন কারখানার উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক

$C(x) = 100 + .015x^2$, এবং আয় অপেক্ষক

$R(x) = 3x$, দেয়া থাকলে কারখানার মুনাফা অপেক্ষক

$\pi(x) = R(x) - C(x)$

$= 3x - 100 - .015x^2$

(ঙ) উৎপাদন অপেক্ষক (Production function) ঃ উৎপাদনের মৌলিক চারটি উপাদান হচ্ছে জমি, শ্রম, পুঁজি এবং উদ্যোগ। কোন উৎপাদনে শুধু শ্রম ও পুঁজির উপর তার পরিমাণ নির্ভরশীল হলে উৎপাদন অপেক্ষক $P = f(L, K)$ যেখানে

P উৎপাদনের পরিমাণ,

L শ্রমের পরিমাণ এবং

K পুঁজির পরিমাণ।

বহুল পরিচিত কব-ডগলাস উৎপাদন অপেক্ষক (Cobb-Douglas production function) ঃ এ ধরনেরই একটি উৎপাদন অপেক্ষক এবং তার প্রকাশরূপ হচ্ছে

$P = CK^{\alpha}L^{\beta}$

যেখানে C, α, β এককেকটি ধ্রুব এবং

$\alpha + \beta = 1$

(চ) ভোগ ও সঞ্চয় অপেক্ষক (Consumption and Saving function) ঃ মোট ভোগের পরিমাণ C, জাতীয় আয় Y, ভোগ প্রবণতা (propensity to consume) c এবং শূন্য আয় পর্যায়ে ভোগ a (একটি নির্ধারিত ধ্রুব) হলে ভোগ অপেক্ষক $C = a + cY$. অর্থাৎ জাতীয় আয় বৃদ্ধির সঙ্গে ভোগও বৃদ্ধি পায় আবার জাতীয় আয় $Y = C + S$ যেখানে S = সঞ্চয়ের পরিমাণ অতএব

$$S = Y - C$$
$$= Y - (a + cY)$$

৫.৪ একটি পণ্যের চাহিদা অপেক্ষক $x = \frac{1}{3}(20 - 2p)$ যেখানে x পণ্যের পরিমাণ এবং p পণ্যটির একক প্রতি মূল্য। পণ্যটির একক প্রতি উৎপাদন ব্যয় 35 টাকা। পণ্যটির বিক্রয়লব্ধ আয়ের অপেক্ষক গঠন কর উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক c(x) এবং মুনাফা অপেক্ষক π(x) এ দুটিও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

আয় অপেক্ষক $R(x) = p.x$ (পণ্যের একক প্রতি মূল্য × পণ্যের পরিমাণ

$$= p.\frac{1}{3}(20 - 2p)$$
$$= \frac{1}{3}\ p(20 - 2p)$$

উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C(x) = 35.x$

$$= 35.\frac{1}{3}(20 - 2p)$$
$$= \frac{35}{3}(20 - 2p)$$

মুনাফা অপেক্ষক $\pi(x) = R(x) - C(x)$

$$= \frac{1}{3}p(20-2p) - \frac{35}{3}(20-2p)$$

$$= \frac{1}{3}(20-2p)(p-35)$$

$$= \frac{1}{3}(-2p^2 + 90p - 700)$$

৫.৫ একটি কারখানার পণ্যের জন্য চাহিদা অপেক্ষক $3q = 98 - 4p$ এবং একক প্রতি উৎপাদন ব্যয় $= 3q + 2$ যেখানে q উৎপাদনের পরিমাণ এবং p — একক প্রতি বিক্রয়মূল্য। আয় অপেক্ষক এবং মুনাফা অপেক্ষক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আয় অপেক্ষক $R(x) = p.q$

চাহিদা অপেক্ষক থেকে, $p = \frac{98 - 3q}{4}$

$\therefore$ আয় অপেক্ষক $= \left(\frac{98 - 3q}{4}\right)q$

একক প্রতি উৎপাদন ব্যয় $= 3q + 2$ এবং উৎপাদনের পরিমাণ $= q$

$\therefore$ উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C(x) = q(3q + 2)$

এবং মুনাফা অপেক্ষক $= R(x) - C(x) = \left(\frac{98 - 3q}{4}\right)q - q(3q + 2)$

$$= \frac{15}{4}q(6 - q)$$

অনুশীলনী — ৫

১. অপেক্ষকের সংজ্ঞা দাও। উদাহরণসহ অপেক্ষকের স্বাধীন ও নির্ভরশীল চলকের মধ্যে সম্পর্ক দেখাও।

২. সংক্ষিপ্ত আলোচনা কর ঃ ক. বহুমান অপেক্ষক খ. অব্যক্ত অপেক্ষক গ. তুরীয় অপেক্ষক ঘ. অমূলদ অপেক্ষক ঙ. একধারা অপেক্ষক চ. যৌগিক অপেক্ষক।

৩. অপেক্ষকের সীমা বলতে কি বুঝায়? বাম ও ডান দিক থেকে সীমা নির্ধারণের ধারণা দাও।

৪. সীমা নির্ধারণ কর ঃ

ক. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{5x^2 - 11x + 2}$

খ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + x^2}}{x}$

গ. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$ [সংকেত ঃ লব অংশকে মূলদকরণ কর]

৫. নিরবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক বলতে কি বুঝায়? দেখাও যে $x = 1$ এর জন্য $x^2 - 4x - 2$ একটি নিরবচ্ছিন্ন অপেক্ষক।

৬. মুনাফা অপেক্ষক এবং উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষকের মধ্যে কোন সম্পর্ক আছে কি? উদাহরণের মাধ্যমে দেখাও।

৭. একটি প্রতিষ্ঠানের পণ্য বিক্রয়লব্ধ আয় অপেক্ষক $R = 100q - q^2$ এবং উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $T = q^3 - \frac{27}{2} q^2$, যেখানে R = বিক্রয় লব্ধ আয়, T = মোট উৎপাদন ব্যয় এবং q = পণ্যের পরিমাণ। প্রতিষ্ঠানটির মুনাফা অপেক্ষক নির্ণয় কর।

৮. একটি পণ্যের সরবরাহ অপেক্ষক $S = P - 10$ এবং চাহিদা অপেক্ষক $D = 20 - \frac{P}{2}$ যেখানে S = সরবরাহের পরিমাণ D = চাহিদার পরিমাণ এবং P = মূল্য। পণ্যটির ভারসাম্য মূল্য এবং ভারসাম্য চাহিদা কত?

ষষ্ঠ অধ্যায়

অন্তরীকরণ

[DIFFERENTIATION]

কোন অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের সামান্যতম পরিবর্তনের ফলে নির্ভরশীল চলকের পরিবর্তনের হার নির্ধারণের জন্য অপেক্ষকটির অন্তরক বা বিভেদক সহগ (derivative) ব্যবহার করা হয় এবং এই অন্তরক নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকেই অন্তরীকরণ বলা হয়। ধরা যাক একটি অপেক্ষক $y = f(x)$ এ স্বাধীন চলক x, নির্ভরশীল চলক y। সেক্ষেত্রে x এর তুলনায় y এর অন্তরীকরণ বলতে এমন একটি প্রক্রিয়াকে বুঝাবে যার মাধ্যমে x এর মানের সামান্য পরিবর্তনের জন্য y এর পরিবর্তনের হার পাওয়া যায় এবং এই হারকে

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\ f(x)\ \right]$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\frac{dy}{dx}$ হচ্ছে x–এর তুলনায় y অপেক্ষকের অন্তরক বা বিভেদক সহগ।

দূরত্ব (s) এবং সময়ের (t) মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক বিবেচনা করা যাক। দূরত্ব সময়ের উপর নির্ভরশীল, আর সেক্ষেত্রে সময়ের সামান্যতম পরিবর্তনের কারণে অতিক্রান্ত দূরত্বের পরিবর্তনের হার পেতে হলে দূরত্ব অপেক্ষক অর্থাৎ $s = f(t)$ অপেক্ষকের অন্তরক নির্ণয় করতে হবে, অর্থাৎ

$$\text{গতি} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[f(t)\right]$$

$\frac{ds}{dt}$ দ্বারা সময় (t) এর তুলনায় অতিক্রান্ত দূরত্বের (s)পরিবর্তনের হারকে বুঝায় এবং $\frac{ds}{dt}$ হচ্ছে t এর তুলনায় s অপেক্ষকের অন্তরীকরণের ফলে প্রাপ্ত অন্তরকের মান।

সময়ের তুলনায় দূরত্বের পরিবর্তন অর্থাৎ গতির হার ত্বরণ (acceleration) কিংবা মন্দনের (retardation) উপর নির্ভরশীল। কিন্তু সময় যদি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিমাণ পরিবর্তিত হয় তবে ত্বরণ বা মন্দন গতির উপর কোন প্রভাব ফেলতে পারে না অর্থাৎ গতি

অপরিবর্তিত থাকে তাই সময়ের সামান্যতম পরিবর্তনের তুলনায় অতিক্রান্ত দূরত্বের পরিবর্তন সেই সামান্যতম সময়ে তার গতির সমান হবে, অর্থাৎ

$\frac{ds}{dt} = v$ (যেখানে v = গতি)। আবার আমরা জানি, $s = v.t$ এবং উপরের বর্ণনা থেকে $\frac{ds}{dt} = v$, অতএব

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(v.t) = v$$

প্রদত্ত উদাহরণে স্বাধীন চলক t, নির্ভরশীল চলক s এবং v একটি ধ্রুব (গতির মান)। $s = f(t)$ অপেক্ষকটির অন্তরক $\frac{ds}{dt} = v$। কোন অপেক্ষক $y = f(x)$ এর অন্তরীকরণের ফলে প্রাপ্ত অন্তরককে $\frac{dy}{dx}$ ব্যতিত y' বা $f'(x)$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

একটি নিরবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক $y = 4x$ নেয়া যাক। ধরা যাক x এর অতি সামান্য ∂x পরিমাণ বৃদ্ধির কারণে y অতি সামান্য ∂y পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। সেক্ষেত্রে,

$$y + \partial y = 4(x + \partial x)$$

$$= 4x + 4\partial x$$

$$\therefore \partial y = 4\partial x \qquad (\because y = 4x)$$

বা, $= \frac{\partial y}{\partial x} = 4$

কিন্তু $\frac{\partial y}{\partial x}$ হচ্ছে x এর সামান্য পরিবর্তনের জন্য y এর পরিবর্তনের হার। এভাবে, স্বাধীন চলকের পরিবর্তনের পরিমাণ শূন্যের কাছাকাছি হলে নির্ভরশীল চলকের পরিবর্তনের সঙ্গে স্বাধীন চলকের পরিবর্তনের যে অনুপাত পাওয়া যায় সেটিই বিভেদক সহগ বা সীমার মাধ্যমে

$$\frac{d}{dx}(y) \text{ বা } \frac{dy}{dx} = \lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x}$$

সাধারণভাবে, $y = f(x)$ হলে

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\partial x \to 0} \frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}$$

অন্তরীকরণের সূত্রসমূহ

অন্তরীকরণের বিভিন্ন সূত্র নির্ধারণের জন্য সীমার প্রয়োগ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। যেমন

ক $y = x^n$

$$y + \partial y = (x + \partial x)^n$$

$$= x^n + {}^nc_1 x^{n-1}\partial x + {}^nc_2 x^{n-2}(\partial x)^2 + \ldots + (\partial x)^n$$

(দ্বিপদী উপপাদ্য দেখ)

$$\therefore \ \partial y = {}^nc_1 x^{n-1}\partial x + {}^nc_2 x^{n-2}(\partial x)^2 + \ldots \ldots + (\partial x)^n$$

বা, $\dfrac{\partial y}{\partial x} = {}^nc_1 x^{n-1} + {}^nc_2 x^{n-2}\partial x + \ldots \ldots + (\partial x)^{n-1}$

$$\therefore \lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x} = {}^nc_1 x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

অর্থাৎ $\boxed{y = x^n \text{ হলে } \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}}$

খ. $y = cf(x)$ যেখানে c একটি ধ্রুব দেয়া থাকলে

$$y + \partial y = cf(x + \partial x)$$

$$\therefore \ \partial y = cf(x + \partial x) - y$$

$$= cf(x + \partial x) - cf(x)$$

$$= c[f(x + \partial x) - f(x)]$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = c\left[\frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}\right]$$

$$\lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\partial x \to 0} c\left[\frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}\right]$$

$$= c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$\therefore \ \boxed{y = cf(x) \text{ হলে } \frac{dy}{dx} = c\frac{d}{dx}[f(x)]}$$

বিঃ দ্রঃ কোন অপেক্ষক একটি ধ্রুবের সমান হলে তার বিভেদক সহগ শূন্য হবে। অর্থাৎ

$y = C$ দেয়া থাকলে যেখানে C একটি ধ্রুব

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} C = 0$$

এভাবে সীমা ব্যবহার করে দেখানো যায় যে

গ. $y = f(x) + \psi(x) + \eta(x) + \dots\dots$ হলে

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[f(x) + \psi(x) + \eta(x) + \dots] \\ &= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[\psi(x)] + \frac{d}{dx}[\eta(x)] + \dots\end{aligned}}$$

৬.১ $y = x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$$

৬.২ $y = \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

৬.৩ $y = 7x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7x^3)$$

$$= 7\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 7.(3x^{3-1})$$

$$= 7.3x^2 = 21x^2$$

৬.৪ $y=\frac{1}{2}x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{-3}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[x^{-3-1}\right]$$
$$=\frac{1}{2}(-3)\,[x^{-3-1}]$$
$$=-\frac{3}{2}x^{-4}=-\frac{3}{2x^4}$$

৬.৫ $y=\frac{2}{3}x^4-4x^3-\frac{1}{5}x^2+\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^4\right]+\frac{d}{dx}\left[4x^3\right]-\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}x^2\right]+\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$
$$=\frac{8}{3}x^3+12x^2-\frac{2}{5}x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

৬.৬ $y=\frac{(1+x)^2}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{(1+x)^2}{x^2}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}\right]$$
$$=\frac{d}{dx}\left[x^{-2}+2x^{-1}+1\right]=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^2}$$

অন্তরক নির্ণয়ের অন্যান্য সূত্র ও তাদের প্রয়োগ উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হল।

ঘ. $u=f(x)$ এবং $v=\psi(x)$ হলে যদি $y=uv$ হয়

তবে, $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$ অর্থাৎ

$$\boxed{\frac{d}{dx}=\left[f(x).\psi(x)\right]=f(x)\frac{d}{dx}\left[\psi(x)\right]+\psi(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]}$$

অপেক্ষকের সংখ্যা দুয়ের অধিক হলে তাদের গুণফলের অন্তরক নির্ণয়ের সময় উপরের সূত্রকে বর্ধিত আকারে গ্রহণ করা যায়। যেমন p, q, r, s প্রত্যেকেই x–এর একেকটি অপেক্ষক হলে

$$\frac{d}{dx}(p.q.r.s)=q.r.s\frac{dp}{dx}+p.r.s\frac{dq}{dx}+p.q.s\frac{dr}{dx}+p.q.r\frac{ds}{dx}$$

৬.৭ $y = (5x^2 + 1)(x^2 - 3x)$ হলে

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 3x)\frac{d}{dx}(5x^2 + 1) + (5x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 3x)$$

$$= (x^2 - 3x)\,10x + (5x^2 + 1)(2x - 3)$$

$$= 20x^3 - 15x^2 - 28x - 3$$

৬.৮ $y = (x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1)$

$$= (x + 1)(x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1) + (x + 1)(x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1)$$

$$+ (x^2 + 1)(x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 1)\,3x^2 + (x + 1)(x^3 + 1)\,2x + (x^2 + 1)(x^3 + 1)$$

$$= 3x^2(x^3 + x^2 + x + 1) + 2x(x^4 + x^3 + x - 1) + (x^5 + x^3 + x^2 + 1)$$

$$= 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 2x$$

$$+ x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

$$= 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

ঙ. $u = f(x)$ এবং $v = \psi(x)$ হলে যদি $y = \frac{u}{v}$ হয় তবে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right] = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right] = \frac{\psi(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[\psi(x)]}{[\psi(x)]^2}}$$

৬.৯ $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ হলে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}\right]$$

$$= \frac{(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1) - (x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)\,3x^2-(x^3+1)2x}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{x^4-3x^2-2x}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{x(x+1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

৬.১০ $y = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{x+3}$ হলে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+3)\frac{d}{dx}[(x-1)(2x+1)]-(x-1)(2x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x+3)[(x-1)\frac{d}{dx}(2x+1)+(2x+1)\frac{d}{dx}(x-1)]-(x-1)(2x+1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x+3)[(x-1)2+2x+1]-(x-1)(2x+1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x+3)(4x-1)-(x-1)(2x+1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+6x-1)}{(x+3)^2}$$

চ. $y = f(u)$ এবং $u = \psi(x)$ হলে

$$y = f\{\psi(x)\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{dx}[f\{\psi(x)\}]$$

$$= \frac{d}{du}[f(u)]\frac{du}{dx} \text{ অথবা}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

৬.১১ $y = (2x^2 - 5x - 8)^2$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য প্রথমে ধরা যাক $2x^2 - 5x - 8 = u$

$\therefore\ y = u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^2)\frac{d}{dx}(2x^2-5x-8)$$

$$= 2u\,(4x-5)$$

$$= 2(2x^2-5x-8)\,(4x-5)$$

৬.১২ $y = \frac{1}{\sqrt{3x^2-7}}$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য প্রথমে ধরা যাক $3x^2 - 7 = u$

$\therefore\ y = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d}{dx}(2x^2-7)$$

$$= -\frac{1}{2}u^{\frac{-3}{2}}(6x)$$

$$= -\frac{6x}{2}(3x^2-7)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{3x}{(3x^2-7)^{\frac{3}{2}}}$$

ছ. $y = \log_a x$ হলে

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e}$$ এবং

$y = \log x$ হলে

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$$

৬.১৩ $y = \log(x^2 - \sqrt{x-1})$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক, $x^2 - \sqrt{x-1} = u$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log u) = \frac{d}{du}(\log u).\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}\frac{d}{dx}\left(x^2 - \sqrt{x-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2 - \sqrt{x-1}}\right)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)$$

৬.১৪ $y = \log(5x^2 + 2)$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক $5x^2 + 2 = u$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log u) = \frac{d}{du}(\log u).\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}\frac{d}{dx}(5x^2 + 2)$$

$$= \left(\frac{1}{5x^2 + 2}\right)10x$$

$$= \frac{10x}{5x^2 + 2}$$

জ. $y = e^x$ হলে

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

৬.১৫ $y = e^{\log x}$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক, $\log x = u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^u) = \frac{d}{du}(e^u).\frac{du}{dx}$$

$$= e^{u} \cdot \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= e^{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} e^{\log x}$$

৬.১৬ $y = e^{5x^2}$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক, $5x^2 = u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{u}) \qquad = \frac{d}{du}(e^{u})\frac{du}{dx}$$

$$= e^{u} \cdot \frac{d}{dx}(5x^2)$$

$$= e^{5x^2}(10x)$$

$$= 10x\, e^{5x^2}$$

ঝ. $y = a^x$ হলে

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a}$$

৬.১৭ $y = 5^{3x^2 + 2}$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক, $3x^2 + 2 = u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5^{u}) \qquad = \frac{d}{du}(5^{u}) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 5^{u} \log_e 5 \frac{d}{dx}(3x^2 + 2)$$

$$= 5^{3x^2 + 2} \log_e 5.6x$$

$$= 6x \log_e 5 .\ 5^{3x^2 - 2}$$

অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরীকরণ

অন্তরীকরণের জন্য প্রদত্ত সূত্রাবলীতে $y = f(x)$ আকারে প্রত্যক্ষভাবে প্রকাশিত অপেক্ষকের অন্তরীকরণ দেখানো হয়েছে। কিন্তু অপেক্ষক সর্বদা প্রত্যক্ষভাবে প্রকাশিত নাও হতে পারে। দুটি চলক y এবং x এর মধ্যে সম্পর্ক পরোক্ষভাবে উল্লেখের দুটি নমুনা দেয়া হল ঃ

ক. $y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y} = 0$

খ. $x^2 - y^2 + 4x = 5y$

কোন অপেক্ষক এমন অব্যক্ত অপেক্ষকের আকৃতিতে দেয়া থাকলেও তার একটি চলক y-কে অপর চলক x-এর তুলনায় অন্তরীকরণ করা যায় অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ –এর মান নির্ণয় করা যায়। সেক্ষেত্রে প্রধান কৌশল হচ্ছে প্রথমে অপেক্ষকটি থেকে x–এর মাধ্যমে y–এর মান প্রকাশ করা, যেমন,

৬.১৮ $y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y} = 0$ হলে

$$y\sqrt{1+x} = -x\sqrt{1+y}$$

বা, $y^2(1+x) = x^2(1+y)$ (উভয় পাশকে বর্গ করে)

বা, $y^2 + xy^2 = x^2 + x^2y$

বা, $y^2 - x^2 + xy^2 - x^2y = 0$

বা, $(y-x)(y+x+xy) = 0$

এখন $y-x \neq 0$, যেহেতু $y \neq x$ (প্রদত্ত সমীকরণের প্রকৃতি থেকে)

$\therefore$ $y + x + xy = 0$

বা, $y = -\frac{x}{1+x}$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

অব্যক্ত অপেক্ষককে ভিন্নভাবেও অন্তরীকরণ করা যায়। দ্বিতীয় পদ্ধতিতে

পূর্বের মতো $y = u$ ধরে $\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{du}(u)\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$ কিংবা

$y = u$ ধরে $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{du}(u^2)\frac{du}{dx} = 2u\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$

এভাবে অগ্রসর হওয়া যায়।

৬.১৯ $x^2 - y^2 + 4x = 5y$ অপেক্ষককে অন্তরীকরণ করলে

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} + 4 = 5\frac{dy}{dx} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dy}y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}\right]$$

বা, $-2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = -2x - 4$

বা, $\frac{dy}{dx}(2y + 5) = 2x + 4 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 4}{2y + 5}$

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ (Successive differentiation)

কোন অপেক্ষককে অন্তরীকরণ করলে যে অন্তরক পাওয়া যায় তার মান শূন্য না হলে আবার অন্তরীকরণ করা যায় এবং দ্বিতীয়বার অন্তরীকরণের ফলে প্রাপ্ত অন্তরক শূন্য না হলে তাকে আবারও অন্তরীকরণ করা যায়। এভাবে পরপর অন্তরীকরণের প্রক্রিয়াকে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ বলে।

$y = f(x)$ অপেক্ষকের প্রথম অন্তরক (first derivative) $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা প্রকাশিত হলে $\frac{dy}{dx}$ –এর অন্তরক অর্থাৎ $y = f(x)$ এর দ্বিতীয় অন্তরক $\frac{d^2y}{dx^2}$ দ্বারা প্রকাশিত, এভাবে $\frac{d^2y}{dx^2}$ –এর অন্তরক অর্থাৎ $y = f(x)$–এর তৃতীয় অন্তরক $\frac{d^3y}{dx^3}$, n–তম অন্তরক $\frac{d^ny}{dx^n}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

৬.২০ $y = \log(x^2 + 3)$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$–এর মান কত ?

সমাধান ঃ $y = \log(x^2 + 3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2 + 3}\right)$$

$$= \frac{6 - 2x^2}{(x^2 + 3)^2}$$ (নিজেরা নির্ণয় কর)

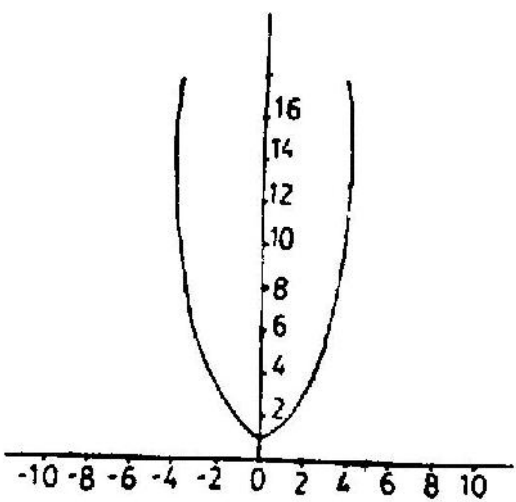
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{6-2x^2}{(x^2+3)^2}\right\}$$
$$= \frac{4x(x^2-9)}{(x^2+3)^4} \qquad \text{(নিজেরা নির্ণয় কর)}$$

অন্তরীকরণের প্রয়োগ

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অন্তরীকরণের প্রয়োগ সম্পর্কে জানতে হলে প্রথমে বিভিন্ন প্রকার অপেক্ষকের লেখচিত্রিকরূপ (Graphical representation) সম্পর্কে ধারণাসহ কোন অপেক্ষক কোন বিন্দুতে বর্ধিষ্ণু (increasing), কোন বিন্দুতে ক্ষয়িষ্ণু (decreasing) কিংবা অপেক্ষকের সর্বোচ্চ (maximum) বা সর্বনিম্ন (minimum) মান বলতে কি বুঝায় ইত্যাদি জানতে হবে।

বর্ধিষ্ণু এবং ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক (increasing and decreasing function)

বুঝার সুবিধার জন্য প্রথমে কোন একটি অপেক্ষক নিয়ে তার লেখচিত্র অংকন করা যাক। ধরা যাক, $y = x^2 + 1$ একটি অপেক্ষক তার লেখচিত্র অংকন করলে চিত্রটি হবে নিম্নরূপ ঃ



(চিত্র নং ঃ ৬)

x–এর মান 0, 1, 2, 3 ইত্যাদি ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকলে y–এর মান যথাক্রমে 1, 2, 5, 10 ইত্যাদি অর্থাৎ ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং মূলবিন্দুর ডানদিকে লেখচিত্রের গতি ঊর্ধ্বমুখে ধাবিত। কিন্তু যদি x–এর মান মূলবিন্দুর বামদিকে বৃদ্ধি পেতে থাকে (–3, –2, –1) ইত্যাদি তবে y–এর মান ক্রমশ হ্রাস পেতে থাকে (যথাক্রমে 10, 5, 2 ইত্যাদি) এবং লেখচিত্রের গতি নিম্নমুখে ধাবিত হয়। অর্থাৎ মূল বিন্দুর ডানদিকে x–এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে y-এর মান বৃদ্ধি পায় বলে তার পরিবর্তনের হার ধনাত্মক বা $\frac{dy}{dx} > 0$ কিন্তু মূল বিন্দুর বামদিকে x–এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে y–এর মান হ্রাস পায় বলে তার পরিবর্তনের হার ঋণাত্মক বা $\frac{dy}{dx} < 0$। সাধারণভাবে $y = f(x)$ অপেক্ষকের কোন বিন্দু থেকে x–এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে তার লেখচিত্রের গতি ঊর্ধ্বমুখী হলে ঐ বিন্দুতে $y = f(x)$ কে বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক এবং কোন বিন্দু থেকে x–এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে তার লেখচিত্রের গতি নিম্নমুখী হলে ঐ বিন্দুতে $y = f(x)$ কে ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক বলে। গাণিতিকভাবে বিষয়টি এভাবে উপস্থাপিত করা হয় ঃ

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1} > 0 \Rightarrow x = x_1$ বিন্দুতে y x এর বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1} < 0 \Rightarrow x = x_1$ বিন্দুতে y x এর ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক

অপেক্ষকের পরিবর্তনের হার $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন তা যদি অপেক্ষকের সব বিন্দুতে একই (অর্থাৎ কোনো ধ্রুব) হয় তবে সেক্ষেত্রে অপেক্ষকটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। যেমন,

$y = 2x + 3$

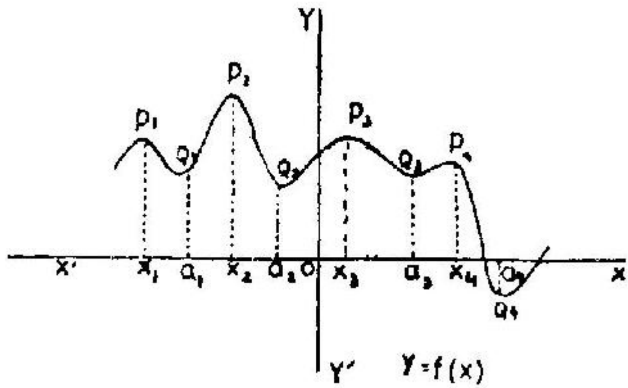
$\frac{dy}{dx} = 2$ এবং x–এর যে কোন মানের জন্য $\frac{dy}{dx}$ সর্বদা 2 বলে $y = 2x + 3$ এর সকল বিন্দুতে তার পরিবর্তনের হার (2) অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং $y = 2x + 3$ একটি সরল রেখা নির্দেশ করে (নিজের লেখচিত্র অংকন করে সত্যতা যাচাই কর)।

সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান (maxima and minima)

উপরের ব্যবহৃত উদাহরণে $y = x^2 + 1$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে লেখচিত্র নিচের দিকে উত্তল (convex downwards) অর্থাৎ উপরের দিকে অবতল (concave upwards)। কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের লেখচিত্র নিচের বা উপরের দিকে উত্তল বা অবতল হবার অর্থ

হচ্ছে লেখচিত্রটি বক্র রেখা তৈরি করে বা তার দিক অপরিবর্তিত হয়। আর দিক পরিবর্তন হওয়া সম্ভব তখনই যখন অপেক্ষকটির মান হ্রাস (বৃদ্ধি) পেতে পেতে এক পর্যায়ে তা সর্বনিম্ন (সর্বোচ্চ) হয় এবং অতঃপর বৃদ্ধি (হ্রাস) পেতে থাকে। এভাবে কোন অপেক্ষক কোন বিন্দুতে হ্রাসপ্রাপ্তি বন্ধ করে সেখান থেকে বৃদ্ধি পেতে থাকলে ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান সর্বনিম্ন (minimum) আর কোন অপেক্ষক কোন বিন্দুতে বৃদ্ধিপ্রাপ্তি বন্ধ করে সেখান থেকে হ্রাস পেতে থাকলে ঐ বিন্দুতে তার মান সর্বোচ্চ (maximum) হয়।

কোন অপেক্ষক $y = f(x)$ এর কোন বিন্দুতে সর্বোচ্চ মানের অর্থ এই নয় যে y এর তদপেক্ষা বড় অন্য কোন মান নেই। অর্থাৎ একটি অপেক্ষকের একাধিক সর্বোচ্চ মান থাকতে পারে। অনুরূপভাবে একটি অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মানও একাধিক থাকতে পারে। নিচের চিত্রটি লক্ষ্য কর।



(চিত্র ঃ ৭)

চিত্র ৭ এ P_1, P_2, P_3 এবং P_4 বিন্দুতে লেখ উপরের দিকে উত্তল (নিচের দিকে অবতল) অর্থাৎ $x > x_1$, $x > x_2$, $x > x_3$, এবং $x > x_4$ এদের প্রতিটি ক্ষেত্রেই y এর মান হ্রাস পেতে থাকে। আবার Q_1, Q_2, Q_3, এবং Q_4 বিন্দুগুলিতে লেখ উপরের দিকে অবতল (নিচের দিকে উত্তল) অর্থাৎ $x > a_1$, $x > a_2$, $x > a_3$, এবং $x > a_4$ এদের প্রতিটি ক্ষেত্রে y এর মান বৃদ্ধি পেতে থাকে। চিত্রে আরও লক্ষণীয় যে $x < x_1$, $x < x_2$, $x < x_3$ এবং $x < x_4$ সবক্ষেত্রেই $y = f(x)$ বর্ধিষ্ণু কিন্তু $x > x_1$, $x > x_2$, $x > x_3$ এবং $x > x_4$ সবক্ষেত্রে $y = f(x)$ ক্ষয়িষ্ণু। প্রতিক্ষেত্রেই y এর মান বৃদ্ধি পাওয়া বন্ধ করে হ্রাস পাওয়া শুরু করেছে, পরবর্তীতে Q_1, Q_2, Q_3 এবং Q_4 বিন্দুতে গিয়ে হ্রাস পাওয়া

বন্ধ করে আবার বৃদ্ধি পেতে শুরু করেছে। সর্বোচ্চ মানের সংজ্ঞানুযায়ী $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $x = x_1, x = x_2, x = x_3$ এবং $x = x_4$ প্রতিটি বিন্দুতেই সর্বোচ্চ মান অর্জন করে। একইভাবে যুক্তি দেখিয়ে বলা যায় $x = a_1, x = a_2, x = a_3$ এবং $x = a_4$ প্রতিটি বিন্দুতেই অপেক্ষকটি সর্বনিম্ন মান অর্জন করে।

কোন বিন্দুতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের লেখ যদি উপরের দিকে উত্তল (নিচের দিকে অবতল) হয় অর্থাৎ তার পরবর্তী অংশে অপেক্ষকটি ক্ষয়িষ্ণু হয় তবে সেই বিন্দুতে অপেক্ষকের পরিবর্তনের হার হ্রাস পাবে অর্থাৎ এই হারের পরিবর্তন হার $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ ঋণাত্মক হবে। অন্য কথায় $x = x_1$ বিন্দুতে কোন অপেক্ষকের মান সর্বোচ্চ হলে সেই বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$; বিপরীতভাবে $x = x_1$ বিন্দুতে অপেক্ষক $y = f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন হলে সেই বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

আবার $x = x_1$ বিন্দুতে যদি $y = f(x)$ এর মান সর্বোচ্চ হয় তবে $x = x_1$ বিন্দুর ঠিক আগে অর্থাৎ $x = x_1 - \in$ (যেখানে $\in$ ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র মান) বিন্দুতে $y(x)$ বর্ধিষ্ণু। অতএব এই বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} > 0$ এবং $x = x_1$ বিন্দুর ঠিক পরে অর্থাৎ $x = x_1 + \in$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ক্ষয়িষ্ণু, অতএব এই বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} < 0$। কিন্তু $\frac{dy}{dx}$ x এর নিরবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক (continuous function) বলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হবার পথে তাকে অবশ্যই $x = 0$ এর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করতে হবে এবং তা হবে এই সর্বোচ্চ মানের বিন্দুতেই। অর্থাৎ কোন বিন্দুতে $y = f(x)$ এর মান সর্বোচ্চ হলে সে বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$। অনুরূপভাবে, কোন বিন্দুতে $y = f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন হলে সে বিন্দুতেও $\frac{dy}{dx} = 0$

উপরের আলোচনা থেকে কোন অপেক্ষক $y = f(x)$ এর সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য বৈশিষ্ট্য বা শর্তাবলী নিম্নোক্ত আকারে তালিকাবদ্ধ করা যায় ঃ

সর্বোচ্চ মানের জন্য,

প্রয়োজনীয় (necessary) শর্ত ঃ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1} = 0$

যথেষ্ট (sufficient) শর্ত ঃ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1} < 0$

সর্বনিম্ন মানের জন্য,

প্রয়োজনীয় শর্ত : $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1} = 0$

যথেষ্ট শর্ত : $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1} > 0$

জেনে রাখা ভাল যে $y = f(x)$ এর জন্য $x = x_1$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং $x = x_1$ বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ হতে পারে। এক্ষেত্রে $x = x_1$ বিন্দুটি হবে $y = f(x)$ এর শুধু দিক পরিবর্তন বিন্দু (point of inflexion) অর্থাৎ $x = x_1 - \in$ বিন্দুতে $y = f(x)$ বর্ধিষ্ণু থাকলে $x = x_1 + \in$ বিন্দুতেও $y = f(x)$ বর্ধিষ্ণুই থাকবে তবে তার লেখ-এর গতিপথ পার্শ্বদিকে মোচড় খাবে এবং এই দিক পরিবর্তন বিন্দুতে

$\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

নিচে কোন অপেক্ষক $y = f(x)$-এর সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান অনুসন্ধানের প্রক্রিয়ার একটি ধাপভিত্তিক বর্ণনা দেয়া হল :

ধাপ ১ : $y = f(x)$ অপেক্ষকের জন্য $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

ধাপ ২ : $\frac{dy}{dx} = 0$ বসিয়ে প্রাপ্ত সমীকরণ থেকে x এর সকল মান নির্ণয় কর (ধরা যাক এসব মান হবে $x = a, x = b, x = c$ ইত্যাদি।

ধাপ ৩ : $\frac{d^2y}{dx^2}$ এ $x = a, b$ বা c বসিয়ে যদি $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = a} < 0$ হয় তবে $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ এর মান সর্বোচ্চ। যদি $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = b} > 0$ হয় তবে $x = b$ বিন্দুতে $y = f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন ; এভাবে x এর যেসব মানের জন্য $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ তাদের জন্য সবক্ষেত্রেই $y = f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন এবং যেসব মানের জন্য $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ তাদের জন্য সবক্ষেত্রেই $y = f(x)$ এর মান সর্বোচ্চ। প্রদত্ত ব্যাখ্যার ধারা অনুযায়ী y এর সর্বোচ্চ মান $= f(a)$ এবং সর্বনিম্ন মান $f(b)$।

৬.২১ নিচের অপেক্ষকসমূহের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $y = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 15$

খ. $y = x^2 - 5x + 12$

গ. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

ঘ. $y = 2x^2 - 15x^2 + 36x + 12$

সমাধান ঃ

ক. $\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 36x + 15$

$\frac{dy}{dx} = 0$ হলে $12x^2 - 36x + 15 = 0$

অর্থাৎ $x = \frac{5}{2}$ এবং $x = \frac{1}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x - 36$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = \frac{5}{2}} = 24.\frac{5}{2} - 36 = 24 > 0$

$\therefore$ $x = \frac{5}{2}$ বিন্দুতে y এর মান সর্বনিম্ন এবং প্রদত্ত অপেক্ষকে

$x = \frac{5}{2}$ বসিয়ে, $y = 4.\left(\frac{5}{2}\right)^3 \quad 18.\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 15.\frac{5}{2} + 15 = \frac{5}{2}$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = \frac{1}{2}} = 24.\frac{1}{2} - 36 = -12 < 0$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে y–এর মান সর্বোচ্চ এবং প্রদত্ত অপেক্ষকে

$x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে $y = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 18.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 15.\frac{1}{2} + 15 = \frac{35}{2}$

অর্থাৎ y–এর সর্বোচ্চ মান $\frac{35}{2}$ এবং সর্বনিম্ন মান $\frac{5}{2}$

খ. $y = x^2 - 5x + 12$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 5$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x-5 = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{5}{2}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$; x–এর যে কোন মানের জন্য $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, তাই

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = \frac{5}{2}} > 0$ এবং অপেক্ষকটি $x = \frac{5}{2}$ বিন্দুতে সর্বনিম্ন মান অর্জন করে।

তাছাড়া, অপেক্ষকটির কোন সর্বোচ্চ মান নেই। ভিন্ন কথায় অপেক্ষকটির শুধু সর্বনিম্ন মান আছে এবং তা হবে $y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5.\frac{5}{2} + 12 = \frac{23}{4}$

গ. $y = x^3-3x^2 + 3x + 7$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \therefore \quad x = 1$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x-6$ এবং

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = 1} = 6.1 - 6 = 0$ অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের

কোনটিই নেই কেন না $0 > 0$ এবং $0 < 0$

ঘ. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 12$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0 \quad \therefore \quad x = 2, x = 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x-30$$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = 2} = 12.2-30 = -6 < 0$ এবং

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=3} = 12.3 - 30 = +6 > 0$ অতএব $x = 2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান সর্বোচ্চ, $x = 3$ বিন্দুতে তার মান সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে

$y = 2.2^3 - 15.2^2 + 36.2 + 12 = 40$ এবং

$y = 2.3^3 - 15.3^2 + 36.3 + 12 = 39$

৬.২২ একটি কোম্পানির মোট উৎপাদন ব্যয় C এবং মোট বিক্রয়লব্ধ আয় R–এর সঙ্গে উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণের (x) সম্পর্ক নিম্নরূপ ঃ

$C = 80 + .014x^2$ এবং $R = 2.8x$

উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণ কত হলে কোম্পানিটির মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে? এই সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ কত? উৎপাদনের পরিমাণ 115 একক হলে মুনাফা কত হবে?

সমাধান ঃ ধরা যাক মুনাফার পরিমাণ = P

আমরা জানি $P = R - C$

$= 2.8x - (80 + .014x^2)$

মুনাফা অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{2.8x - (80 + .014x^2)\right\}$$

$$= 2.8 - .028x$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow 2.8 - .028x = 0 \quad \therefore\ x = 100$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2.8 - .028x) = -.028 < 0$$

$\therefore$ $x = 100$ হলে P–এর মান সর্বোচ্চ হবে।

বা সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণ = 100 একক, এবং সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ $2.8 \times 100 - (80 + .014 \times 100^2) = 60$ মুদ্রা একক। উৎপাদনের পরিমাণ 115 একক হলে মুনাফা

$$= 2.8 \times 115 - (80 + .014 \times 115^2)$$

$$= 56.85 \text{ মুদ্রা একক}$$

৬.২৩ কোন কারখানার উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণ x হলে উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = x^2 + \frac{16}{x} + 2$। কত একক পণ্য উৎপাদন করলে উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হবে? সর্বনিম্ন উৎপাদন ব্যয়ের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $C = x^2 + \frac{16}{x} + 2$

$$\frac{dC}{dx} = 2x - \frac{16}{x^2}$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \quad \therefore x = 2$$

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 2 + \frac{32}{x^3}$$

$$\left(\frac{d^2C}{dx^2}\right)_{x=2} = 2 + \frac{32}{2^3} > 0$$

$\therefore$ $x = 2$ হলে উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হবে এবং সর্বনিম্ন উৎপাদন ব্যয় $C_{min} = 2^2 + \frac{16}{2} + 2 = 14$ মুদ্রা একক

৬.২৪ একটি বল পয়েন্ট কলমের কারখানা তার উৎপাদিত প্রতিটি কলম 7.00 টাকা মূল্যে বাজারে বিক্রি করে। তার উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = 900 + \frac{1}{2}\left\{\frac{q}{30}\right\}^2$ যেখানে C = মোট উৎপাদন ব্যয় q = উৎপাদনের পরিমাণ।

ক. মোট মুনাফা অপেক্ষক নির্ণয় কর ;

খ. উৎপাদনের পরিমাণ কত হলে মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে?

গ. সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ কত?

ঘ. 5000 একক কলম উৎপাদন করলে মুনাফা কত হবে?

সমাধান ঃ

ক. উৎপাদনের পরিমাণ = q একক প্রতি মূল্য = 7

$\therefore$ মোট বিক্রয়লব্ধ আয় $R = 7q$

উৎপাদন ব্যয় $C = 900 + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{30}\right)^2$

$\therefore$ মুনাফা অপেক্ষক $P = 7q - \left[900 + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{30}\right)^2\right]$

$= 7q - \frac{q^2}{1800} - 900$

এখানে p = মুনাফা

খ. $\frac{dP}{dq} = 7 - \frac{q}{900}$ $\therefore \frac{dP}{dq} = 0 \Rightarrow 7 - \frac{q}{900} = 0$ বা $q = 6300$

$\frac{d^2P}{dq^2} = -\frac{1}{900} < 0$ $\therefore$ উৎপাদনের পরিমাণ 6300 হলে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে।

গ. সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ যখন $q = 6300$ একক

$P = 7.6300 - \left[900 + \frac{1}{2}\left(\frac{6300}{30}\right)^2\right]$

$= 21150$ টাকা

ঘ. উৎপাদনের পরিমাণ 5000 একক হলে মুনাফা

$P_{5000} = 7.5000 - \left[900 + \frac{1}{2}\left(\frac{5000}{30}\right)^2\right]$

$= 20211$ টাকা।

৬.২৫ চাহিদা সমীকরণে p = মূল্য এবং q = উৎপাদনের পরিমাণ এবং সমীকরণটি $p = \frac{9}{(x+1)^2}$ হলে চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা (Price elasticity) নির্ণয় কর।

সমাধান : চাহিদার স্থিতিস্থাপকতার সংজ্ঞানুযায়ী

মূল্য স্থিতিস্থাপকতা $\eta_p = \dfrac{\text{চাহিদার পরিমাণের আনুপাতিক পরিবর্তন}}{\text{মূল্যের আনুপাতিক পরিবর্তন}}$

$$= \frac{-\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

(মূল্য বৃদ্ধি পেলে চাহিদা হ্রাস পায় বলে p এবং x–এর একটির পরিবর্তন ধনাত্মক হলে অপরটি ঋণাত্মক। একারণে η_p–এর সূত্রে বিয়োগ চিহ্ন দেয়া প্রয়োজন)

শর্তানুযায়ী, $$p = \frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = -\frac{18}{(x+1)^3}$$

এবং $$\frac{dx}{dp} = -\frac{(x+1)^3}{18}$$

$$\therefore \eta_p = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

$$= -\frac{9}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{x} \left\{ -\frac{(x+1)^3}{18} \right\}$$

$$= \frac{x+1}{2x}$$

চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতাকে $\dfrac{\text{মূল্যের তুলনায় প্রান্তিক চাহিদার পরিমাণ}}{\text{গড় চাহিদার পরিমাণ}}$ সূত্র দ্বারাও নির্ণয় করা যায়। মূল্যের তুলনায় প্রান্তিক চাহিদার পরিমাণ $= \frac{dx}{dp}$ এবং গড় চাহিদার পরিমাণ $= \dfrac{\text{মোট চাহিদা}}{\text{একক প্রতি মূল্য}} = \dfrac{x}{p}$ এবং চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা $\eta_p = \dfrac{\frac{dx}{dp}}{\frac{x}{p}}$

$$= \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

৬.২৬ চাহিদা অপেক্ষক $Q = \frac{10}{P+1}$ যেখানে Q = পরিমাণ এবং P = মূল্য $P = 4$ একক হলে এই মূল্যে চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা কত?

সমাধান ঃ $\eta_d = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$

$Q = \frac{10}{P+1}$ এখান থেকে $P = 4$ হলে $Q = \frac{10}{4+1} = 2$

$\frac{dQ}{dP} = -\frac{10}{(P+1)^2}$ এবং $\eta_d = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$

$$= \frac{4}{2}\left\{-\frac{10}{(4+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{4}{5}$$

৬.২৭ p = একক প্রতি মূল্য, x = পরিমাণ হলে

ক. প্রমাণ কর যে প্রান্তিক আয় $MR = p\left[1-\frac{1}{\eta_d}\right]$

এবং গড় আয় $AR = MR\left[\frac{\eta_d}{\eta_d-1}\right]$, যেখানে η_d = চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা।

খ. চাহিদা অপেক্ষক $p = \sqrt{12-x}$ হলে প্রান্তিক আয় কত?

সমাধান ঃ মোট আয় R = মূল্য × পরিমাণ

$$= px$$

গড় আয় $AR = \frac{R}{x} = p$

প্রান্তিক আয় $MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(px) = p\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(p)$

$$= p + x\frac{dp}{dx}$$

$$= p\left(1 + \frac{x}{p}\frac{dp}{dx}\right)$$

বা, $MR = p\left(1-\frac{1}{\eta_d}\right)$ $\qquad \because \eta_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$

প্রমাণিত।

$$\text{প্রান্তিক আয় } MR = p\left(1 - \frac{1}{\eta_d}\right)$$
$$= AR\left(1 - \frac{1}{\eta_d}\right) \quad \because p = AR$$
$$\therefore AR = MR \div \left(1 - \frac{1}{\eta_d}\right)$$
$$= MR\left(\frac{\eta_d}{\eta_d - 1}\right) \quad \text{প্রমাণিত।}$$

খ. মোট আয় $R = p.x$

$$= (\sqrt{12 - x})x$$
$$\text{প্রান্তিক আয় } MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{12 - x})x$$
$$= x\frac{d}{dx}\sqrt{12 - x} + \sqrt{12 - x}\,\frac{d}{dx}(x)$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{12 - x}} + \sqrt{12 - x}$$

৬.২৮ একটি শিল্পের মোট উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = \frac{2}{5}q^3 - q^2 + 9q + 75$ যেখানে C = মোট উৎপাদন ব্যয়, q = উৎপাদনের পরিমাণ। নিচের পরিমাণসমূহ নির্ধারণ কর ;

ক. গড় উৎপাদন ব্যয়,

খ. প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয়,

গ. গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় এবং

ঘ. গড় পরিবর্তনশীল উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হবার জন্য প্রয়োজনীয় উৎপাদনের পরিমাণ।

সমাধান ঃ ক. গড় উৎপাদন ব্যয় $AC = \left(\frac{2}{5}q^3 - q^2 + 9q + 75\right) \div q$

$$= \frac{2}{5}q^2 - q + 9 + \frac{75}{q}$$

খ. প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MR = \frac{dC}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{2}{5}q^3 - q^2 + 9q + 75\right)$

$$= \frac{6}{5}q^2 - 2q + 9$$

গ. গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় $AVC = \dfrac{\text{মোট পরিবর্তণশীল ব্যয়}}{q}$

$$= \left(\frac{2}{5}q^3 - q^2 + 9q\right) \div q$$

$$= \frac{2}{5}q^2 - q + 9$$

ঘ. $\dfrac{d}{dq}(AVC) = \dfrac{d}{dq}\left(\dfrac{2}{5}q^2 - q + 9\right) = \dfrac{4}{5}q - 1$

$\dfrac{d}{dq}(AVC) = 0 \Rightarrow \dfrac{4}{5}q - 1 = 0 \quad \therefore q = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{d^2}{dq^2}(AVC) = \dfrac{4}{5}$

এবং $\left[\dfrac{d^2(AVC)}{dq^2}\right]_{q = \frac{5}{4}} > 0$

অতএব গড় পরিবর্তনশীল উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হবার জন্য $q = \dfrac{5}{4}$

৬.২৯ দেয়াল ঘড়ি উৎপাদনকারী একটি প্রতিষ্ঠান সপ্তাহে xটি করে ঘড়ি তৈরি করে। টাকায় এই x টি ঘড়ির মোট উৎপাদন ব্যয় $= x^2 + 54x + 2300$; প্রতিষ্ঠানটি ঘড়ি উৎপাদনে একচ্ছত্র কারবারী এবং তার পণ্যের জন্য চাহিদা অপেক্ষক $x = \dfrac{406 - p}{7}$ যেখানে p একটি ঘড়ির মূল্য। প্রমাণ কর যে সপ্তাহে 22 টি ঘড়ি উৎপাদন করলে তার নীট আয় সর্বোচ্চ হবে। একচ্ছত্র কারবারী হিসাবে প্রতিষ্ঠানটি একটি ঘড়ির বিক্রয়মূল্য কত নির্ধারণ করবে ?

সমাধান : মোট উৎপাদন ব্যয় $C = x^2 + 54x + 2300$

নীট আয় অর্থাৎ মুনাফা সর্বোচ্চ হলে প্রতিষ্ঠানটির জন্য প্রান্তিক ব্যয় উৎপাদন ব্যয় = প্রান্তিক আয়, অর্থাৎ

$MC = MR$

$MC = \dfrac{dC}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 + 54x + 2300) = 2x + 54$

চাহিদা অপেক্ষক $x = \dfrac{406 - p}{7}$ থেকে

বিক্রয়মূল্য $p = 406 - 7x$

মোট আয় $R = p.x = (406 - 7x)x$

প্রান্তিক আয় $MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}[(406 - 7x)x]$

$$= 406 - 14x$$

যেহেতু সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফার জন্য $MC = MR$

$$2x + 54 = 406 - 14x$$

বা, $16x = 352 \quad \therefore x = 22$

অর্থাৎ সপ্তাহে 22টি ঘড়ি উৎপাদন করলে মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে।

একচ্ছত্র কারবারী হিসাবে প্রতিষ্ঠান সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য 22টি ঘড়ি উৎপাদন করবে অর্থাৎ $x = 22$, কিন্তু প্রতিষ্ঠানটির জন্য

$x = \frac{406 - p}{7}$ অর্থাৎ $22 = \frac{406 - p}{7}$ $\quad \therefore p = 252$ টাকা।

৬.৩০ একটি প্রতিষ্ঠান একটিই মাত্র পণ্য উৎপাদন করে এবং বাজারজাত করে। প্রতিষ্ঠানে উৎপন্ন পণ্যের মজুত রাখার কোন ব্যবস্থা নেই। এ অবস্থায় Q = বাজারজাত পণ্যের পরিমাণ হলে গড় নীট আয় $\left(91 - \frac{Q}{95}\right)$ টাকা। এছাড়া উৎপাদনের জন্য স্থিরীকৃত ব্যয় 30,000 টাকা এবং গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় = $\left(8 + \frac{Q}{65}\right)$ এবং বাজারজাতকরণের জন্য স্থিরীকৃত ব্যয় 15000 ও গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় = $\left(2 + \frac{Q}{900}\right)$ টাকা। হিসাব কর:

ক. কত পরিমাণ পণ্য উৎপাদন করলে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে?

খ. সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ কত হবে?

গ. কারখানার হিসাবের সুবিধার জন্য উৎপাদন বিভাগ থেকে বাজার-জাতকরণ বিভাগের কাছে উৎপাদিত পণ্য যদি একক প্রতি 70 টাকায় দিয়ে দেয়া হয় তবে কত পরিমাণ উৎপাদন করলে উৎপাদন বিভাগের মুনাফা সর্বোচ্চ হবে?

ঘ. গ-এ বর্ণিত ব্যবস্থা গ্রহণের ফলে উৎপাদন ও বাজারজাতকরণ এই দু'-বিভাগের মোট মুনাফা কত হবে? উভয় বিভাগের মুনাফাকেও আলাদাভাবে দেখাও।

সমাধান ঃ ক. মুনাফা = মোট বিক্রয়লব্ধ আয় – (মোট স্থিরীকৃত ব্যয় + মোট পরিবর্তনশীল ব্যয়)

$$P = Q\left(91 - \frac{Q}{95}\right) - \left\{30000 + 15000 + Q\left(8 + \frac{Q}{65}\right) + Q\left(2 + \frac{Q}{900}\right)\right\}$$

$$= 81Q - .027Q^2 - 45000$$

সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য Q এর পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে।

$$\frac{dP}{dQ} = 81 - .054Q$$

$$\frac{dP}{dQ} = 0 \Rightarrow 81 - .054Q = 0 \qquad \therefore Q = 1500$$

$$\frac{d^2P}{dQ^2} = -.054 < 0$$

অতএব সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য উৎপাদনের পরিমাণ হবে 1500 একক।

খ. সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ

$$P_{max} = 81 \times 1500 - .027 \times (1500)^2 - 45000$$
$$= 15750 \text{ টাকা।}$$

গ. উৎপাদন বিভাগ বাজারজাতকরণ বিভাগের নিকট একক প্রতি 70 টাকা মূল্যে পণ্য বিক্রি করলে, উৎপাদন বিভাগের মুনাফা

P_1 = 70 × (উৎপাদনের পরিমাণ) – (উৎপাদন বিভাগের স্থিরীকৃত ব্যয় + উৎপাদন বিভাগের পরিবর্তনশীল ব্যয়)

$$= 70Q - \left[30000 + \left(8 + \frac{Q}{65}\right)Q\right]$$

$$= 62Q - \frac{Q^2}{65} - 30000$$

এবং P_1 সর্বোচ্চ করতে হলে

$$\frac{dP_1}{dQ} = 62 - \frac{2Q}{65}; \frac{dP_1}{dQ} = 0 \Rightarrow 62 - \frac{2Q}{65} = 0 \therefore Q = 2015$$

$\frac{d^2P_1}{dQ^2} = -\frac{2}{65} < 0$ অর্থাৎ উৎপাদন বিভাগের মুনাফা সর্বোচ্চ করতে হলে 2015 একক উৎপাদন করতে হবে।

ঘ. একক প্রতি 70 টাকা মূল্যে বাজারজাতকরণ বিভাগকে দিয়ে দিলে উৎপাদন বিভাগের সর্বোচ্চ মুনাফা হয় যখন উৎপাদন বিভাগ 2015 একক পণ্য উৎপাদন করে। তাতে প্রতিষ্ঠানের মোট মুনাফা

$$P = 81(2015) - .027(2015)^2 - 450000$$
$$= 8589 \text{ টাকা।}$$

এবং উৎপাদন বিভাগের মুনাফা

$$P_1 = 62Q - \frac{Q^2}{65} - 30000$$
$$= 62(2015) - \frac{(2015)^2}{65} - 30000$$
$$= 32465 \text{ টাকা।}$$

বাজারজাতকরণ বিভাগের মুনাফা

P_2 = মোট বিক্রয়লব্ধ আয় – (উৎপাদন বিভাগ থেকে ক্রয়ের জন্য ব্যয় + বাজারজাতকরণ বিভাগের স্থিরীকৃত ব্যয় + বিভাগের পরিবর্তনশীল ব্যয়)।

$$= Q\left(91 - \frac{Q}{95}\right) - \left[70Q + Q\left(2 + \frac{Q}{900}\right) + 15000\right]$$

$= 19Q - .01164Q^2 - 15000$ এবং Q–এর পরিমাণ 2015 হলে

$P_2 = 19(2015) - .01164(2015)^2 - 15000 = -23935$ টাকা।

৬.৩১ একটি কোম্পানির মোট উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + 24x + 9$ (C = উৎপাদন ব্যয় এবং x = উৎপাদনের পরিমাণ)। প্রতি একক উৎপাদনের উপর 2 টাকা হারে কর আরোপিত হলে কোম্পানির মালিক তা পণ্যের বিক্রয় মূল্যের সঙ্গে যোগ করে দেয়। চাহিদা অপেক্ষক $P = 2400 - 5x$ যেখানে P = একক প্রতি বিক্রয় মূল্য। মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ করার জন্য কত পরিমাণ পণ্য উৎপাদন প্রয়োজন? সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফার জন্য পণ্যের একক প্রতি বিক্রয়মূল্য কত হবে?

সমাধান ঃ মোট আয় অপেক্ষক $R = (2400 - 5x)x$

একক প্রতি 2 টাকা হারে কর আরোপিত হবার পর মোট ব্যয় অপেক্ষক

$$C = \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + 24x + 9 + 2x$$

$$= \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + 26x + 9$$

মুনাফা অপেক্ষক $= R - C = (2400 - 5x)x - (\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 26x + 9)$

[সমাধানের অবশিষ্ট অংশ নিজেরা কর]

৬.৩২ দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থে বর্গাকৃতি একটি পানির ট্যাঙ্ক নির্মাণের জন্য ধাতব পাত ব্যবহারের সিদ্ধান্ত নেয়া হয়। ট্যাঙ্কটির উপরের ঢাকনি আপাতত তৈরি না করলে প্রমাণ কর যে তার জন্য ধাতব পাত কিনতে সর্বনিম্ন পরিমাণ ব্যয় হবে যদি তার গভীরতা প্রস্থের অর্ধেক হয়।

সমাধান ঃ ধরা যাক ট্যাঙ্কটির দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার এবং গভীরতা $= y$ মিটার।

$\therefore$ ট্যাঙ্কটির আয়তন $\upsilon = x.\ x.\ y = x^2y$ ঘনমিটার।

এবং $y = \frac{\upsilon}{x^2}$

ট্যাঙ্কটি তৈরি করতে চারপাশের জন্য পাত লাগবে $4(x.y) = 4xy$ এবং তলায় $x.x = x^2$ অর্থাৎ সর্বমোট $x^2 + 4xy$ বর্গমিটার।

কিন্তু $x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{\upsilon}{x^2}$ $\left(\because v = x.x.y \text{ এবং } y = \frac{\upsilon}{x^2}\right)$

$$= x^2 + \frac{4\upsilon}{x}$$

ধাতব পাতের জন্য ব্যয় সর্বনিম্ন করতে হলে প্রয়োজনীয় মোট পাতের পরিমাণ সর্বনিম্ন করতে হবে। মোট পাতের এলাকা A হলে

$$A = x^2 + \frac{4\upsilon}{x}$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{4\upsilon}{x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \rightarrow 2x - \frac{4\upsilon}{x^2} = 0 \quad \therefore \quad x = (2\upsilon)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2\left(1 + \frac{4\upsilon}{x^3}\right) > 0 \ (\because \upsilon \text{ এবং } x \text{ উভয়েই} > 0$$

অতএব A সর্বনিম্ন হবে যখন $x = (2\upsilon)^{\frac{1}{3}}$

এখন, $y = \dfrac{\upsilon}{x^2} = \dfrac{\upsilon}{(2\upsilon)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{2}(2\upsilon)^{\frac{1}{3}}$

কিন্তু $(2\upsilon)^{\frac{1}{3}} = x \qquad \therefore\ y = \dfrac{1}{2}x$

অর্থাৎ পাত্রের জন্য ব্যয় সর্বনিম্ন করতে হলে গভীরতা প্রস্থের অর্ধেক হতে হবে।

৬.৩৩ একটি বই–এর পৃষ্ঠায় ছাপা অক্ষরে লেখার জন্য 100 বর্গ সে. মি. জায়গা নির্ধারিত আছে। প্রতি পৃষ্ঠায় উপরে ও নিচে 2 সে. মি. হিসাবে এবং দু'পাশে 1.5 সে. মি. হিসাবে মার্জিন রাখতে হলে প্রতি পৃষ্ঠার সবচেয়ে লাভজনক আকৃতি (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক ছাপার জায়গার দৈর্ঘ্য x এবং প্রস্থ y,

সেক্ষেত্রে $xy = 100$ এবং $y = \dfrac{100}{x}$

মার্জিনসহ পৃষ্ঠার দৈর্ঘ্য $= (x + 2 + 2) = x + 4$

মার্জিনসহ পৃষ্ঠার প্রস্থ $= (y + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = y + 3$

পুরো ক্ষেত্রফল $A = (x + 4)(y + 3)$

$$= (x + 4)\left(\frac{100}{x} + 3\right)$$

$$= 3x + \frac{400}{x} + 112$$

পৃষ্ঠার আকৃতি সবচেয়ে লাভজনক হতে গেলে ক্ষেত্রফলকে সর্বনিম্ন হতে হবে।

$$\frac{dA}{dx} = 3 - \frac{400}{x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 3 - \frac{400}{x^2} = 0 \ \therefore\ x = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

এবং $\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{800}{x^3} > 0 \left(x = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ এর জন্য} \right)$

অর্থাৎ A সর্বনিম্ন যখন $x = \frac{20}{\sqrt{3}}$ সে. মি.

এবং $y = \frac{100}{x} = \frac{100\sqrt{3}}{20} = 5\sqrt{3}$ সে. মি.

পৃষ্ঠার সবচেয়ে লাভজনক আকৃতি হবে $\frac{20}{\sqrt{3}} \times 5\sqrt{3}$ (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ)।

আংশিক (Partial) **ও সামগ্রিক** (Total) **অন্তরীকরণ**

ধরা যাক u দুটি স্বাধীন চলক x এবং y–এর অপেক্ষক অর্থাৎ $u = f(x, y)$ এবং স্বাধীন চলকদ্বয়ের একটি স্থির থাকলে অপরটির পরিবর্তনের জন্য u–এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় প্রয়োজন। সেক্ষেত্রে

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f(x, y)\right]$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\left[f(x,y)\right]$$ নির্ণয় করতে হবে।

এরূপ অন্তরক নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে আংশিক অন্তরীকরণ বলে। উদাহরণের মাধ্যমে প্রক্রিয়াটি দেখানো হল।

৬.৩৪ $z = x^2 + 6xy + y^2$ দেয়া থাকলে $\frac{dz}{dx}$ এবং $\frac{dz}{dy}$ নির্ণয় কর

সমাধান ঃ $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{x}(x^2 + 6xy + y^2)$

এ সময় y কে ধ্রুব ধরতে হবে

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + 6y\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y^2)$$

$$= 2x + 6y.1 + 0$$

$$= 2x + 6y$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2 + 6xy + y^2)$$

এ সময় x কে ধ্রুব ধরতে হবে

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2) + 6x\frac{d}{dy}(y) + \frac{d}{dy}(y^2)$$
$$= 0 + 6y.1 + 2y$$
$$= 6x + 2y$$

উদাহরণে প্রথম পর্যায়ের আংশিক অন্তরীকরণ (Partial differentiation of first order) দেখানো হয়েছে। আংশিক অন্তরীকরণ উচ্চতর পর্যায়েরও (higher order) হতে পারে।

$u = f(x, y)$ দেয়া থাকলে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)$$ এবং

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right)$$ উভয়েই হবে দ্বিতীয় পর্যায়ের আংশিক অন্তরীকরণ।

এছাড়া মিশ্র পর্যায়ের (mixed order) অন্তরীকরণও করা হয়ে থাকে। $y = f(x, y)$-এর জন্য মিশ্র পর্যায়ের অন্তরীকরণ হবে

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right)$$ এবং

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

৬.৩৫ দ্বিতীয় পর্যায়ের সকল আংশিক ও মিশ্র অন্তরীকরণ কর :

$$z = 4x^2 + 9xy - 5y^2$$

সমাধান :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^2 + 9xy - 5y^2)$$
$$= 8x + 9y$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(4x^2 + 9xy - 5y^2)$$
$$= 9x - 10y$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(8x + 9y)$$

$$= 8$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dy}(9x - 10y)$$

$$= -10$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dx}(9x - 10y)$$

$$= 9$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dy}(8x + 9y)$$

$$= 9$$

কোন অপেক্ষক $z = f(x,y)$–এর সামগ্রিক অন্তরীকরণ বলতে $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ –এর মান নির্ণয় করাকে বুঝায়।

৬.৩৬ $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ কে সামগ্রিক অন্তরীকরণ কর।

সমাধান ঃ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y + x^2y^2 + xy^3)$

$$= 3x^2y + 2xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y + x^2y^2 + xy^3)$$

$$= x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

$$\therefore\ dz = (3x^2y - 2xy^2 + y^3)\,dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)dy$$

অনুশীলনী – ৬

১. অন্তরীকরণ বলতে কি বুঝায়? সংজ্ঞা ও উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

২. অন্তরক কি? অন্তরকের প্রয়োগ কিভাবে বাণিজ্য শাস্ত্রের ব্যবহারিক সমস্যা সমাধানে সহায়তা করে?

৩. অব্যক্ত অপেক্ষক থেকে তার অন্তরক নির্ণয়ের প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা কর।

৪. পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ কাকে বলে? প্রথম ও দ্বিতীয় অন্তরক ব্যবহার করে কোন একটি ব্যবহারিক সমস্যার সমাধান বোঝাও।

৫. বর্ধিষ্ণু এবং ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষকের সংজ্ঞা দাও। কোন অপেক্ষক কোন বিন্দুতে বর্ধিষ্ণু এবং কোন বিন্দুতে ক্ষয়িষ্ণু তা কিভাবে নির্ণয় করা যায়?

৬. "একটি অপেক্ষকে একাধিক সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান থাকতে পারে" — আলোচনা কর।

৭. কোন অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের শর্তাবলী কি?

৮. নিচের অপেক্ষকসমূহের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $y = .04x^2 - .9x + 10$

খ. $y = \frac{1}{3}[-2x^2 + 105x - 100]$

গ. $Q = 10 + \log x^2 - 2x$

ঘ. $y = 152 - 3.04x^2 - 1064x$

ঙ. $C = 2 + 8q - q^2$

৯. চাহিদা অপেক্ষক $x = \frac{8}{p^3}$ যেখানে x = চাহিদার পরিমাণ এবং p = মূল্য। চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় কর।

১০. চাহিদা অপেক্ষক $qp^n = a$ যেখানে q = চাহিদার পরিমাণ, p = মূল্য, n এবং a দুটি ধ্রুব। প্রমাণ কর যে চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা মূল্যের উপর নির্ভরশীল নয়।

১১. উৎপাদনের পরিমাণ যাই হোক না কেন, প্রমাণ কর যে চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা $\eta_d = \frac{AR}{AR-MR}$ যেখানে AR = গড় আয়, MR = প্রান্তিক আয়।

১২. একটি পণ্যের একক প্রতি মূল্য x এবং তার চাহিদা অপেক্ষক $y = \frac{x+2}{x-1}$; এখানে y = চাহিদার পরিমাণ। একক প্রতি মূল্য 5 টাকা হলে চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা কত হবে ?

১৩. চাহিদা অপেক্ষক $p = 4-5x^2$ যেখানে x চাহিদার পরিমাণ এবং p = মূল্য। x–এর মান কত হলে স্থিতিস্থাপকতা এক একক হবে ?

১৪. একটি কারখানার উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = 200x - 10x^2 + \frac{1}{3}x^3$ যেখানে C = মোট উৎপাদন ব্যয়, x = উৎপাদনের পরিমাণ। উৎপাদনের পরিমাণ কত হলে (ক) প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হবে ? (খ) গড় উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হবে ? (গ) গড় উৎপাদন ব্যয় প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয়ের সমান হবে ?

১৫. মোট উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 - 7q + 16$ এবং মোট আয় অপেক্ষক $R = 21q - q^2$ যেখানে C = মোট উৎপাদন ব্যয়, R = মোট আয়, q = উৎপাদনের পরিমাণ। q–এর মান কত হলে (ক) মোট আয় সর্বোচ্চ হবে ? (খ) নীট আয় (মুনাফা) সর্বোচ্চ হবে ? (গ) মোট উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হবে ?

১৬. একটি পণ্যের উৎপাদন অপেক্ষক $Q = 20F + 4F^2 - \frac{F^3}{3}$ যেখানে Q = উৎপাদনের পরিমাণ, F উৎপাদনের উপাদানের পরিমাণ।

ক. কত একক উপাদান ব্যবহার করলে উৎপাদনের পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে ?

খ. প্রান্তিক উৎপাদনের সর্বোচ্চ পরিমাণ কত ?

গ. প্রমাণ কর যে গড় উৎপাদন সর্বোচ্চ হলে তা প্রান্তিক উৎপাদনের সমান হয়।

১৭. চাহিদা ও উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক দেয়া আছে ঃ $P = 30 - 6x$ এবং $C = 6x$ যেখানে P–মূল্য, x–পরিমাণ, C-উৎপাদন ব্যয়।

ক. সর্বোচ্চ উৎপাদনের পরিমাণ, মূল্য ও মুনাফার পরিমাণ কত হবে ?

খ. প্রতি একক পণ্যের উপর 1.00 টাকা হারে কর আরোপ করলে নতুন ভারসাম্য মূল্য এবং উৎপাদনের ভারসাম্য পরিমাণ কত হবে ?

গ. 10% হারে অতিরিক্ত কর আরোপ করলে করজনিত মোট আয়ের পরিমাণ কত হবে ?

১৮. একজন উৎপাদনকারীর পণ্যের চাহিদা অপেক্ষক $x = a + bp$ যেখানে x - দৈনিক গড় বিক্রির পরিমাণ, p–একক প্রতি মূল্য, a এবং b–দুটি ধ্রুব। উৎপাদনকারীর জন্য

উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 54$; যেখোনে C–মোট উৎপাদন ব্যয় এবং x–দৈনিক গড় উৎপাদন (দৈনিক বিক্রির পরিমাণ) উক্ত উৎপাদনকারী গড়ে দৈনিক একক প্রতি 18 টাকা মূল্যের 4টি এবং 17.50 টাকা মূল্যের $4\frac{1}{2}$ টি পণ্য বিক্রি করতে পারলে তার জন্য দৈনিক মোট মুনাফার অপেক্ষক নির্ণয় কর। সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা অর্জন করতে হলে তাকে দৈনিক কতটি পণ্য উৎপাদন (বিক্রি) করতে হবে ?

১৯. চাহিদা অপেক্ষক P = 18–6x, যেখানে P–মূল্য, x–পরিমাণ। একক প্রতি উৎপাদন ব্যয় 6 টাকা হলে মুনাফা অপেক্ষক নির্ণয় কর। মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হলে উৎপাদনের পরিমাণ কত হবে ?

২০. একটি কারখানা 2 টন পরিমাণ পণ্য উৎপাদন করে। কারখানাটির উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 100x + 5$। উৎপাদনের পরিমাণ কত হলে (ক) প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় এবং (খ) গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় সর্বনিম্ন হবে ?

২১. একটি পণ্যের চাহিদা অপেক্ষক $P = 100 - \text{'}01q$ এবং মুনাফা অপেক্ষক $\pi = 50q + 30000$ যেখানে P–মূল্য, q–পরিমাণ, π–মুনাফা। প্রতিটি পণ্যের উপর 10 টাকা হারে কর আরোপিত হলে কর আরোপণের পূর্বে এবং পরে সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য (ক) উৎপাদনের পরিমাণ কত, (খ) সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য একক প্রতি মূল্য কত নির্ধারণ হবে, (গ) সর্বোচ্চ মুনাফা কত হবে ?

২২. কোন বই–এর জন্য একটি পৃষ্ঠার মোট ক্ষেত্রফল 50 বর্গ সে. মি.। প্রতি পৃষ্ঠার উপরে এবং নিচে 2 সে. মি. এবং উভয় পাশে 1 সে. মি. পরিমাণ মার্জিন রাখতে হলে পৃষ্ঠার সবচেয়ে লাভজনক আকৃতি (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) নির্ধারণ কর।

সপ্তম অধ্যায়

সমাকলন

[INTEGRATION]

কোন অপেক্ষক $f(x)$ কে অন্তরীকরণ করলে যে অপেক্ষক (মান) পাওয়া যায় তাকে যদি $\varphi(x)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় তবে $\varphi(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$। এখন যদি প্রশ্ন করা হয়, কোন অপেক্ষককে অন্তরীকরণ করলে $\varphi(x)$ পাওয়া যায় তবে স্বভাবতই তার উত্তর হবে $f(x)$, গাণিতিকভাবে বিষয়টি এভাবে উপস্থাপন করা যায় ঃ $\int\varphi(x)\,dx = f(x)$ এবং এভাবে উপস্থাপিত বিবৃতির অর্থ হচ্ছে $f(x)$-কে অন্তরীকরণ করলে $\varphi(x)$ পাওয়া যায় এবং তথ্যটি সরাসরিভাবে উপস্থাপিত না হয়ে বিপরীত দিক দিয়ে দেয়া হয়েছে। সমাকলন হচ্ছে x–এর অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া এবং $\int\varphi(x)\,dx$ বিবৃতিতে $\int$ চিহ্নটি হচ্ছে সমাকলনের চিহ্ন। বিবৃতিতে dx থাকার অর্থ হচ্ছে x–এর তুলনায় সমাকলন। অতএব $\int\varphi(x)\,dx$–কে পড়তে হবে x–এর তুলনায় $\varphi(x)$–এর সমাকলন। সম্পূর্ণ বক্তব্যটিকে কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা বুঝানো হল ঃ

$f(x) = x$ হলে $\frac{d}{dx}[f(x)] = 1 \Rightarrow \int 1\,dx = x$

$f(x) = x^n$ হলে $\frac{d}{dx}[f(x)] = nx^{n-1} \Rightarrow \int nx^{n-1}\,dx = x^n$

$f(x) = \log x$ হলে $\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \log x$

যে অপেক্ষককে সমাকলন করা হয় তাকে সমাকলনীয় রাশি (integrand) এবং সমাকলনের ফলে যে মান পাওয়া যায় তাকে সমাকলিত মান বা যোজিত মান (integral) বলে। উপরের উদাহরণত্রয়ে 1, nx^{n-1} এবং $\frac{1}{x}$ একেকটি সমাকলনীয় রাশি এবং x, x^n ও $\log x$ যথাক্রমে তাদের সমাকলিত মান। সমাকলনের একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য জানা একান্ত আবশ্যক। বৈশিষ্ট্যটি ব্যাখ্যার প্রয়োজনে ধরা যাক,

$f(x) = x^n + c$ (c একটি ধ্রুব), সেক্ষেত্রে

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(x^n + c) = nx^{n-1} \; (\because \frac{d}{dx}(c) = 0)$$

এবং $\int nx^{n-1}\,dx = x^n$ কিন্তু শুরুতে প্রদত্ত $f(x)$ অপেক্ষকের মান ছিল $x^n + c$; বিপরীত প্রক্রিয়ার অগ্রসর হতে গিয়ে এক পর্যায়ে অপেক্ষক থেকে c অপসারিত হয় বলে প্রদত্ত ক্ষেত্রে সমাকলিত মান তাকে অনুপস্থিত দেখা যায়। ফলশ্রুতিতে, যে অপেক্ষক $f(x)$-কে অন্তরীকরণ করলে অন্য অপেক্ষক $\varphi(x)$ পাওয়া যায় সেই $\varphi(x)$-কে সমাকলন করলে একই অপেক্ষক $f(x)$-কে পাওয়া যায় না। এই গাণিতিক গোলক ধাঁধা এড়ানোর জন্যই সমাকলনের ধ্রুব (constant of integration) সম্পর্কে ধারণা প্রয়োজন।

$f(x) = x^n + 5$ হলে $\frac{d}{dx}[f(x)] = nx^{n-1}$

$f(x) = n^n - 3$ হলে $\frac{d}{dx}[f(x)] = nx^{n-1}$

$f(x) = x^n + c$ হলে $\frac{d}{dx}[f(x)] = nx^{n-1}$ যেখানে c যে কোন ধ্রুব

অতএব বিপরীতভাবে, $\int nx^{n-1}\,dx$ –এর মান $(x^n + 5)$, $(x^n - 3)$ কিংবা $(x^n + c)$ এদের যে কোন একটি হতে পারে। যেহেতু nx^{n-1} অপেক্ষক দেয়া থাকলে $\int nx^{n-1}\,dx$–এর মানে ধ্রুব কোনটি হবে তা কোনভাবেই নির্দিষ্ট করে বলা যায় না, তাই সাধারণভাবে $\int nx^{n-1}\,dx = x^n + c$ (যেখানে c যেকোন ধ্রুব) লেখা হয়। এই c–কেই বলা হয় সমাকলনের ধ্রুব। এবং সাধারণভাবে

$\int \varphi(x)\,dx = f(x) + c$ লেখা হয়। ধ্রুবের মান অনির্দিষ্ট থাকার কারণে এ ধরনের সকল সমাকলনকে অনির্দিষ্ট সমাকলন (indefinite integration) বলে। অনির্দিষ্ট সমাকলনের ক্ষেত্রে সকল সমাকলিত মানে সমাকলনের ধ্রুব যোগ করে দিতে হয়।

সমাকলনের সূত্রসমূহ

সূত্র ১ $\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

৭.১ $\quad \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

৭.২ $\quad \int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + c$

৭.৩ $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

৭.৪ $\int dx = \int 1\, dx = \int x^0\, dx = \dfrac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$

সূত্র ২ $\int \dfrac{1}{x} dx = \log x + c$

৭.৫ $\int \dfrac{x^3}{x^4} = \int \dfrac{1}{x} dx = \log x + c$

সূত্র ৩ $\int e^x dx = e^x + c$

সূত্র ৪ $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log_e a} + c$

৭.৬ $\int 5^x dx = \dfrac{5^x}{\log_e 5} + c$

সূত্র ৫ $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ যেখানে k একটি ধ্রুব

৭.৭ $\int 3x^2 dx = 3\int x^2\, dx = 3\dfrac{x^{2+1}}{2+1} = x^3 + c$

সূত্র ৬ $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\, dx$

$= \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx - \int f_3(x)\, dx + c$

৭.৮ $\int (2 - 3x + x^3)\, dx = \int 2dx - \int 3x\, dx + \int x^3\, dx$

$= 2\int dx - 3\int x dx + \int x^3\, dx$

$= (2x + C_1) - 3\left(\dfrac{x^2}{2} + C_2\right) + \left(\dfrac{x^4}{4} + C_3\right)$

$$= 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{4} + C$$

৭.৯ $\int (4x^3 + 2x^2 - 3x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - 5)\, dx = 4\int x^3\, dx +$

$$2\int x^2\, dx - 3\int x\, dx - 2\int \frac{1}{x}\, dx + 3\int \frac{1}{x^2}\, dx - 5\int dx$$

$$= \frac{4}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2\log x + 3\left(-\frac{1}{x}\right) - 5x + c$$

$$= x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2\log x - \frac{3}{x} - 5x + c$$

সূত্র ৭ $f(x) = u$ এবং $\varphi(x) = v$ হলে $\int \{f(x)\, \varphi(x)\}\, dx = \int (u\, v)\, dx$

এবং $\int (u\, v)\, dx = u \int v\, dx - \int \left\{ \frac{du}{dx} \int v\, dx \right\} dx$

৭.১০ $\int (x-5)(x+5)\, dx = (x-5)\int (x+5)\, dx$

$$\int \left[\frac{d}{dx}(x-5) \left\{ \int (x+5)\, dx \right\} \right] dx$$

$$= (x-5)\left(\frac{x^2}{2} + 5x\right) - \int \left[1 \left(\frac{x^2}{2} + 5x\right) \right\} dx$$

$$= (x-5)\left(\frac{x^2}{2} + 5x\right) - \left(\frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x^3}{2} + 5x^2 - \frac{5x^2}{2} - 25x - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} - 25x + c$$

[তবে দুটি অপেক্ষক পূরণ আকৃতিতে দেয়া থাকলে প্রথমে তাদের গুণফল নির্ধারণ করে তারপর গুণফলের সমাকলন করলে অপেক্ষাকৃত সহজে সমাকলিত মান পাওয়া

যায়। যেমন, উপরের উদাহরণে $\int (x-5)(x+5)\,dx = \int (x^2 - 25)\,dx = \int x^2\,dx - \int 25\,dx = \frac{x^3}{3} - 25x + c.$

কতিপয় বিশেষ ক্ষেত্রে সূত্র ৭–এর ব্যবহার অপরিহার্য, যেমন ঃ

৭.১১
$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int (\log x.\,1)\,dx \\ &= (\log x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\log x) \int dx \right\} dx \\ &= (\log x)\,x - \int \left\{ \frac{1}{x} \cdot x \right\} dx \\ &= x \log x - x + c\end{aligned}$$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতির মাধ্যমে সমাকলন (Integration by method of substitution)

কোন অপেক্ষকের সমাকলিত মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে অপেক্ষকটিকে সুবিধামত আকারে রূপান্তরিত করে তার জন্য জানা সূত্রসমূহ প্রয়োগ করা যায়। তবে এই রূপান্তরকরণ প্রক্রিয়াটি সবক্ষেত্র সহজ নয়। এ জন্য অনেক সময় চলক প্রতিস্থাপনের সাহায্য নেয়া হয়। চলক প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে কিভাবে অপেক্ষককে রূপান্তরিত করে সমাকলিত মান নির্ণয় করা যায় এখানে তার কয়েকটি উদাহরণ দেয়া হল ঃ

৭.১২ $\int (3x+5)^4\,dx$

ধরা যাক $3x + 5 = t$

$$\frac{d}{dx}(3x+5) = \frac{d}{dx}(t)$$

বা, $3 = \frac{dt}{dx} \quad \therefore\ dx = \frac{1}{3}dt$

প্রতিস্থাপনের সাহায্যে

$$\begin{aligned}\int (3x+5)^4\,dx &= \int t^4 . \frac{1}{3}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int t^4\,dt \\ &= \frac{1}{3} . \frac{t^5}{5} + c\end{aligned}$$

এখন t–এর মান বসিয়ে

$$\int (3x+5)^4 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+5)^5}{5} + c = \frac{1}{15}(3x+5)^5 + c$$

৭.১৩ $\int \frac{7x^2}{(x^3+2)^4} dx$ ধরা যাক, $x^3 + 2 = t$

$$\frac{d}{dx}(x^3+2) = \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{7}{3} \int \frac{3x^2}{(x^3+2)^4} dx \qquad 3x^2 = \frac{dt}{dx} \quad \therefore \; 3x^2 dx = dt$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{dt}{t^4} = \frac{7}{3} \int t^{-4} dt \qquad = \frac{7}{3} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} - c$$ এখন t–এর মান বসিয়ে

$$= -\frac{7}{9}(x^3+2)^{-3} + c$$

$$= -\frac{7}{9(x^3+2)^3} + c$$

৭.১৪ $\int (x^4+2)^2 3x^3 dx$ ধরা যাক, $x^4 + 2 = t$

$$= \frac{3}{4} \int (x^4+2)^2 4x^3 dx \qquad 4x^3 = \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{3}{4} \int t^2 dt \qquad 4x^3 dx = dt$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{4} t^3 + c$$ এবং t–এর মান বসিয়ে,

$$= \frac{1}{4}(x^4+2)^3 + c$$

প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে সমাকলনের সহায়তাকারী আরও কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্র হচ্ছে ঃ

সূত্র ৮ $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + c$$

সূত্র ৯ $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + c$$

সূত্র ১০ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log \left\{ x + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} \right\} + c$$

সূত্র ১১ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left\{ x + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} \right\} + c$

৭.১৫ $\int \frac{dx}{3x^2-4}$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} \log \frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{x + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right] + c$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \log \frac{\frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}}} \right] + c$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} + c$$

৭.১৬ $\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{2} x + 1}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 2.x.\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{7}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.\frac{\sqrt{7}}{4}} \log \frac{x - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}}{x - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}}\right] + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \log \frac{4x - 3 - \sqrt{7}}{4x - 3 + \sqrt{7}} + c$$

এখন একটি নতুন ধরনের অপেক্ষকের উদাহরণ নেয়া যাক। ধরা যাক একটি অপেক্ষক $\frac{2x + 5}{3x^2 + 2x - 1}$ দেয়া আছে। তার জন্য প্রচলিত পদ্ধতিতে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি প্রয়োগ করলে তার যেকোন অংশকে অন্য কোন মান । দ্বারা চিহ্নিত করতে হবে। দেখা যাবে যে অপেক্ষকটির এমন কোন অংশ নেই যার মান সমান । ধরলে অপেক্ষকটিকে জানা সূত্র প্রয়োগের জন্য সুবিধাজনকরূপে রূপান্তরিত করা যায়। সেক্ষেত্রে তার জন্য প্রতিস্থাপন পদ্ধতিটি একটি বিশেষ ধাঁচে নির্দিষ্ট। উদাহরণের মাধ্যমে তা বুঝানো হল।

$\frac{2x + 5}{3x^2 + 2x - 1}$ অপেক্ষকের $2x + 5 = \lambda \frac{d}{dx}(3x^2 + 2x - 1) + \mu$ ধরি

যেখানে, λ এবং μ দুটি ধ্রুব

সেক্ষেত্রে $2x + 5 = \lambda(6x + 2) + \mu$

বা, $2x + 5 = 6\lambda x + 2\lambda + \mu$

সেখান থেকে $2x = 6\lambda x$ বা, $2 = 6\lambda$

এবং $\lambda = \frac{1}{3}$

$5 = 2\lambda + \mu$

$= 2.\frac{1}{3} + \mu$ বা, $\mu = 5 - \frac{1}{3}$

$= \frac{13}{3}$

[প্রাপ্ত মানসমূহ পরবর্তী উদাহরণে $\int \frac{2x+5}{3x^2+2x-1}dx$–এর মান নির্ণয়ে ব্যবহার করা হয়েছে।]

৭.১৭ $$\int \frac{2x+5}{3x^2+2x-1}dx = \int\left\{\frac{\lambda\frac{d}{dx}(3x^2+2x-1+\mu)}{3x^2+2x-1}\right\}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}(6x+2)+\frac{13}{3}}{3x^2+2x-1}dx \quad \text{যেহেতু } \lambda = \frac{1}{3},\ \mu = \frac{13}{3}$$

(পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদ দেখুন)

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}dx + \frac{13}{3}\int\frac{1}{3x^2+2x-1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log(3x^2+2x-1) + \frac{13}{3.3}\int\frac{1}{x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log(3x^2+2x-1) + \frac{13}{9}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log(3x^2+2x-1) + \frac{13}{9}\frac{1}{2.\frac{\sqrt{10}}{3}}\log\frac{x+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{10}}{3}}{x+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{10}}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\log(3x^2+2x-1) + \frac{13}{6\sqrt{10}}\log\frac{3x+1-\sqrt{10}}{3x+1+\sqrt{10}} + c$$

মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলন (Integration of rational fraction)

মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলনের জন্য প্রথমে মূলদ ভগ্নাংশকে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশে (partial fraction) বিভক্ত করতে হবে। এরপর আংশিক ভগ্নাংশসমূহের সমাকলিত মানের সমষ্টি নির্ণয় করলে তাই হবে প্রদত্ত মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলিত মান।

৭.১৮ $\int \frac{x-2}{2x^2-x-1}\,dx$ (এখানে x–এর সূচক লব (numerator) অংশে হর (demoninator) অংশের চেয়ে ছোট)

উদ্দিষ্ট সমাকলিত মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে

ধরা যাক, $\frac{x-2}{2x^2-x-1}$ বা, $\frac{x-2}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1}$

$$\text{বা, } x-2 = A(x-1) + B(2x+1)$$

x–এর মান 1 হলে $1-2 = B(2.1+1)$

$$\text{বা, } B = -\frac{1}{3}$$

x–এর মান $-\frac{1}{2}$ হলে $-\frac{1}{2} - 2 = A\left(-\frac{1}{2} - 1\right)$

$$\text{বা, } A = \frac{5}{3}$$

$\therefore \frac{x-2}{2x^2-x-1} = \frac{5}{3(2x+1)} - \frac{1}{3(x-1)}$ এবং

$$\int \frac{x-2}{2x^2-x-1}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{1}{2x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{5}{6}\log(2x+1) - \frac{1}{3}\log(x-1) + c$$

৭.১৯ $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$

[এখানে x–এর সূচক লব অংশে হর অংশের চেয়ে ছোট, তবে হর অংশের একটি গুণিতক (factor) বর্গ আকৃতিতে দেয়া আছে]

প্রথমে ধরা যাক, $\frac{2x+1}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$

বা, $2x + 1 = A(x-3)^2 + B(x+2)(x-3) + C(x+2)$

$x = 3$ হলে, $7 = 5C \qquad \therefore\ C = \frac{7}{5}$

$x = -2$ হলে $-3 = 25A \qquad \therefore\ A = -\frac{3}{25}$

এবং উভয় অংশের x^2–এর সহগ তুলনা করলে

$0 = A + B, \qquad \therefore\ B = -A = \frac{3}{25}$

অতএব $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)^2}\,dx = \int\left[-\frac{3}{25(x+2)} + \frac{3}{25(x-3)} + \frac{7}{5(x-3)^2}\right]dx$

$$= -\frac{3}{25}\int\frac{1}{x+2}\,dx + \frac{3}{25}\int\frac{1}{x-3}\,dx + \frac{7}{5}\int\frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= -\frac{3}{25}\log(x+2) + \frac{3}{25}\log(x-3) - \frac{7}{5(x-3)} + c$$

৭.২০ $\int\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx$ এখানে লব এবং হরের উভয় অংশের x–এর সূচক সমান

ধরা যাক, $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 1 + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

বা, $x^3 = (x-a)(x-b)(x-c) + A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$

সমীকরণে পর্যায়ক্রমে $x = a$, $x = b$ এবং $x = c$ বসিয়ে

$$A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)};\ B = \frac{b^3}{(b-a)(b-c)};\ C = \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$\therefore\ \int\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx = \int 1\,dx + \int\frac{A}{x-a}\,dx + \int\frac{B}{x-b}\,dx +$

$$\int \frac{C}{x-c}dx = \int dx + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}\int\frac{1}{x-a}dx$$

$$+ \frac{b^3}{(b-a)(b-c)}\int\frac{1}{x-b}dx + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\int\frac{1}{x-c}dx$$

$$= x + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}\log(x-a) + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)}\log(x-b)$$

$$+ \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\log(x-c) + C$$

নির্দিষ্ট সমাকলিত মান (Definite Integral)

কোন অপেক্ষক $f(x)$–এর সমাকলিত মান $\psi(x)$ হলে অনেক ক্ষেত্রেই নির্দিষ্ট দুটি পরিমাণ $x = a$ এবং $x = b$–এর জন্য $\psi(x)$–এর মানদ্বয়ের প্রভেদ নির্ণয় প্রয়োজন হয়ে পড়ে এবং সেক্ষেত্রে এই প্রভেদের পরিমাণ হয় $\{\psi(b) + c\} - \{\psi(a) + c\}$ অর্থাৎ $\psi(b) - \psi(a)$। এই প্রভেদকে $f(x)$–এর নির্দিষ্ট সমাকলিত মান বলে। নির্দিষ্ট সমাকলনকে উপস্থাপনের পদ্ধতি নিম্নরূপ ঃ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\,\psi(b) - \psi(a)\,] \text{ অথবা } [\,\psi(x)\,]_a^b$$

এবং এর অর্থ হচ্ছে $f(x)$–এর a থেকে b পর্যন্ত সমাকলিত ফল। লক্ষণীয় যে নির্দিষ্ট সমাকলিত ফল–এ সমাকলনের ধ্রুব থাকে না। এ ছাড়া নির্দিষ্ট সমাকলনের নিম্নসীমা (lower limit) এবং ঊর্ধ্বসীমা (upper limit) নির্ধারিত থাকে। প্রদত্ত বর্ণনায় নিম্নসীমা a এবং ঊর্ধ্বসীমা b।

৭.২১ $\int_2^5 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$; ধরা যাক $1 + x^2 = t$

$$2x = \frac{dt}{dx} \text{ বা } 2x\,dx = dt$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{t}\,dt = [\,\log t\,]_2^5$$ t এর মান বসিয়ে

$$= \left[\log (1 + x^2) \right]_2^5$$
$$= \log (1 + 5^2) \quad \log (1 + 2^2)$$
$$= \log 26 - \log 5$$
$$= \log \frac{26}{5}$$

৭.২২ $\int_{-3}^{3} e^{-\frac{x}{2}} dx$; প্রথমে $\int e^{\;\frac{x}{2}} dx$ নির্ণয় করি, এবং তা হবে

$$-2e^{\frac{x}{2}} + c$$

$$\therefore \int_{-3}^{3} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{3} = -2e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{\frac{3}{2}}$$

এখানে সমাকলিত মান নির্ণয় প্রক্রিয়ার ধাপসমূহ তালিকাবদ্ধ করা হল ঃ

ক. প্রদত্ত অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকলনের ফল নির্ণয় কর ;

খ. প্রাপ্ত অনির্দিষ্ট সমাকলনের ফলে চলকের জায়গায় নির্দিষ্ট সমাকলনের জন্য প্রদত্ত উর্ধ্বসীমা বসাও ;

গ. প্রাপ্ত অনির্দিষ্ট সমাকলনের ফলে চলকের জায়গায় নির্দিষ্ট সমাকলনের জন্য প্রদত্ত নিম্নসীমা বসাও ;

ঘ. খ এবং গ ধাপে প্রাপ্ত মানদ্বয়ের প্রভেদ নির্ণয় কর। এটাই হবে নির্দিষ্ট সমাকলিত মান।

নির্দিষ্ট সমাকলিত মানের কতিপয় বৈশিষ্ট্য জেনে রাখা ভাল। এগুলি হচ্ছে,

ক. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$ অর্থাৎ দুটি অপেক্ষকের চলক ভিন্ন ভিন্ন হলেও যদি অপেক্ষকের প্রকৃতি এক হয় এবং তাদের নির্দিষ্ট সমাকলনের নিম্ন এবং উর্ধ্বসীমা সমান হয় তবে তাদের সমাকলিত মানও সমান হবে।

খ. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ অর্থাৎ কোন অপেক্ষকের নিম্ন এবং উর্ধ্বসীমা একই হলে তার নির্দিষ্ট সমাকলিত মান শূন্য।

গ. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ অর্থাৎ কোন অপেক্ষকের নিম্ন ও উর্ধ্বসীমার স্থান বিনিময় ঘটালে নির্দিষ্ট সমাকলিত মানের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।

ঘ. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ অর্থাৎ কোন অপেক্ষকের দুটি নির্দিষ্ট সমাকলিত মানের যোগফলের ক্ষেত্রে যদি প্রথম সমাকলনের উর্ধ্বসীমা দ্বিতীয় সমাকলনের নিম্নসীমার সমান হয় তবে প্রথম সমাকলনের নিম্নসীমাকে নিম্নসীমা ধরে এবং দ্বিতীয় সমাকলনের উর্ধ্বসীমাকে উর্ধ্বসীমা ধরে অপেক্ষকটির নির্দিষ্ট সমাকলন নির্ণয় করলেই চলে।

ঙ. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)$

চ. $f(-x) = -f(x)$ হলে $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

ঙ এবং চ–র ক্ষেত্রে সাংকেতিক বর্ণনা ভাষায় বর্ণনার চেয়ে বেশি সহজবোধ্য বলে তাদের জন্য ভাষায় বর্ণনা দেয়া হল না।

সমাকলনের প্রয়োগ ঃ

সমাকলন অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া বলে বাণিজ্যিক গণিতে অন্তরীকরণের সাহায্যে যা কিছু নির্ধারণ করা যায় তাদের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত সকল বিষয় নির্ধারণে সমাকলন প্রয়োগ করা যায়। যেমন R কোন ব্যবসা প্রতিষ্ঠানের মোট আয় হলে এবং R উৎপাদনের পরিমাণ x–এর অপেক্ষক হলে অর্থাৎ $R = f(x)$ হলে, প্রান্তিক আয় $MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$। বিপরীতভাবে, প্রান্তিক আয় $MR = \psi(x)$ জানা থাকলে মোট আয় $R = \int(MR)\,dx + c$ বা $\int\psi(x)\,dx + c$ হবে যেখানে c একটি ধ্রুব। আবার মোট আয় $R = Px$ যেখানে P একক প্রতি মূল্য। অতএব বলা যায় $Px = \int(MR)\,dx + c$

একইভাবে প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MC = \frac{dC}{dx}$ বলে মোট উৎপাদন ব্যয়

$C = \int(MC)\,dx + k$ যেখানে k একটি ধ্রুব।

এখান থেকে গড় উৎপাদন ব্যয় $AC = \frac{C}{x}$ -এর মান হবে

$$AC = \frac{C}{x} = \frac{\int(MC)\,dx + k}{x}$$

মোট ভোগ C মোট জাতীয় আয় y–এর অপেক্ষক হলে $C = f(y)$, প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা $MPC = \frac{dC}{dy}$ এবং মোট ভোগ হবে

$C = \int(MPC)\,dy + k$ ইত্যাদি।

৭.২৩ একটি কারখানার উৎপাদিত পণ্যের প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MC = 6 + 8x - 3x^2$ যেখানে x উৎপাদনের পরিমাণ। দেখা গেছে যে কারখানাটি যদি পণ্যটির 5 একক উৎপাদন করে তবে তার উৎপাদন ব্যয় হয় 2490 টাকা। কারখানাটির মোট উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক এবং গড় উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MC = 6 + 8x - 3x^2$

$\therefore$ মোট উৎপাদন ব্যয় $C = \int(MC)\,dx$

$$= \int(6 + 8x - 3x^2)\,dx$$

$= 6x + 4x^2 - x^3 + k$ (k সমাকলনের ধ্রুব)

$x = 5$ হলে $C = 2490$ অর্থাৎ

$$2490 = 6.5 + 4.5^2 - 5^3 + k$$

$$= 30 + 100 - 125 + k$$

$$\therefore k = 2485$$

অতএব মোট উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক হবে $C = 6x + 4x^2 - x^3 + 2485$

এবং গড় উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক হবে $AC = \frac{6x + 4x^2 - x^3 + 2485}{x}$

$$= 6 + 4x - x^2 + \frac{2485}{x}$$

৭.২৪ প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা MPS $= \frac{\Delta S}{\Delta y} = 0.5 + 0.2y^{-2}$ যেখানে y = আয়। আরও জানা আছে যে মোট আয় 70 টাকা হলে মোট ভোগের পরিমাণ 50 টাকা। প্রদত্ত তথ্যাবলী থেকে ভোগ অপেক্ষক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ভোগ অপেক্ষকের জন্য প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা (MPC) $= \frac{\Delta C}{\Delta y}$ নির্ণয় করতে হবে। অর্থনীতির সূত্রানুযায়ী MPC = 1 – MPS

$$= 1 - (0.5 + 0.2y^{-2}$$
$$= 0.5 - .2y^{-2}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5}y^{-2}$$

মোট ভোগ $C = \int (MPC)\, dy$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}y^{-2})\, dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{5y} + k$$

কিন্তু মোট আয় $y = 70$ এবং মোট ভোগ $= 50$ অর্থাৎ

$$50 = \frac{1}{2}.70 + \frac{1}{5.70} + k \therefore k = 14.997$$

অর্থাৎ ভোগ অপেক্ষক হবে $C = \frac{1}{2}y + \frac{1}{5y} + 14.997$

৭.২৫ একটি কোম্পানির প্রান্তিক আয় $MR = 10x - x^2$ এবং প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MC = 10 - 2x + x^2$ যেখানে x উৎপাদনের পরিমাণ। কোম্পানিটির উৎপাদনের পরিমাণ কত হলে মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে ? এই সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ কত ?

সমাধান ঃ $P = R - C$ যেখানে P – মোট মুনাফা
R – মোট আয়
C – মোট উৎপাদন ব্যয়।

MR এবং MC থেকে যথাক্রমে R এবং C নির্ণয় করা যায়।

$$R = \int (MR)\, dx = \int (10x - x^2)\, dx = 5x^2 - \frac{1}{3}x^3 + k$$

$$C = \int (MC)\, dx = \int (10 - 2x + x^2)\, dx = 10x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + k$$

$$\therefore P = 5x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 10x + x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

এখন সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য x–এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\frac{dP}{dx} = 12x - 10 - 2x^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow 12x - 10 - 2x^2 = 0 \qquad \therefore\ x = 1\ ;\ 5$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 12 - 4x$$

এবং $\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)_{x=1} = 12 - 4 > 0$

$$\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)_{x=5} = 12 \quad 20 < 0$$

অতএব মুনাফা সর্বোচ্চ হবে যখন উৎপাদনের পরিমাণ $x = 5$ এবং সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ $= 6.5^2 - 10.5 - \frac{2}{3}.5^3$

$= 16.66$ মুদ্রা একক

৭.২৬ চাহিদা ও সরবরাহ অপেক্ষক যথাক্রমে $P = 40 - x^2$ এবং $P = 2x^2 - 8$ যেখানে x–পণ্যের পরিমাণ, P–একক প্রতি মূল্য। ভারসাম্য অবস্থায় টাকায় একক প্রতি মূল্য, ভোক্তার উদ্বৃত্ত (consumer's surplus) এবং উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত (producer's surplus) নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ভারসাম্য অবস্থায় চাহিদা এবং সরবরাহ উভয়ের জন্য একক প্রতি মূল্য সমান। $\therefore\ 40 - x^2 = 2x^2 \cdot 8$ যেখান থেকে $x = 4$ এবং $x = -4$ কিন্তু উৎপাদনের পরিমাণ ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই ভারসাম্য অবস্থায় উৎপাদনের পরিমাণ $x = 4$ এবং মূল্য $P = 40 - 4^2 = 24$ টাকা।

ভোক্তাগণ ভারসাম্য অবস্থায় একক প্রতি 24 টাকা মূল্য দিয়ে 4 একক পণ্য ক্রয় করে। তবে ভোক্তারা শূন্য টাকা থেকে 4 টাকা পর্যন্ত যেকোন মূল্যে পণ্যটি ক্রয় করতে রাজি। এই বিভিন্ন প্রকার মূল্যে ভোক্তাদের মোট ব্যয়ের পরিমাণ হত

$$\int_0^4 (40 - x^2)\,dx = \left[40x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 138\frac{2}{3} \text{ টাকা}$$

কিন্তু ভোক্তাগণ প্রকৃতপক্ষে ব্যয় করে $P.x = 4.24 = 96$ টাকা, অতএব, ভোক্তার উদ্বৃত্ত $= 138\frac{2}{3} - 96 = 42\frac{2}{3}$ টাকা বা 42.66 টাকা। একই প্রক্রিয়ায় যুক্তি প্রদান করে,

উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত $= 24 \times 4 - \int_0^4 (2x^2-8)\,dx$

$$= 96 - \left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_0^4$$

$$= 85\frac{1}{3} \text{ বা } 85.33 \text{ টাকা।}$$

শিক্ষার্থীদের সুবিধার জন্য এখানে ভোক্তা এবং উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত নির্ণয়ের পদ্ধতি পর্যায়ক্রমে দেয়া হল ঃ

ক. চাহিদা এবং সরবরাহ অপেক্ষক মূল্য P এবং পরিমাণ q–এর মাধ্যমে যে আকৃতিতেই প্রকাশ করা থাকুক না কেন তাদেরকে প্রথমে চাহিদা অপেক্ষক $P = D(q)$ এবং সরবরাহ অপেক্ষক $P = S(q)$ এমন দুই প্রত্যক্ষ অপেক্ষকের আকৃতিতে প্রকাশ কর।

খ. ভারসাম্য অবস্থার জন্য $D(q) = S(q)$ থেকে ভারসাম্য মূল্য P_o এবং ভারসাম্য পরিমাণ q_o নির্ণয় কর।

গ. ভোক্তার উদ্বৃত্ত $= \int_0^{q_o} D(q)dq - P_o q_o$ এবং

উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত $= P_o q_o - \int_0^{q_o} S(q)dq$

নির্দিষ্ট সমাকলিত মানের আরও প্রয়োগ

কোন অপেক্ষক $f(x) = Ax^{\alpha}$ যেখানে $A > 0$ এবং $-1 \le \alpha < 0$ এমন আকারে দেয়া থাকলে বুঝা যায় যে x এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে $f(x)$ এর মান কমে আসবে। এখন $f(x)$ যদি কোন পণ্যের x তম এককের উৎপাদনের জন্য প্রয়োজনীয় শ্রমঘন্টার পরিমাণ হয় তবে $f(x) = Ax^{\alpha}$ হয় যেখানে $A > 0$ এবং $-1 \le \alpha < 0$ তবে $f(x)$ কোন পণ্য উৎপাদনের প্রয়োজনীয় শ্রমঘন্টা হ্রাসের হারও নির্দেশ করে। সেক্ষেত্রে $f(x)$ কে অভিজ্ঞতা রেখা (learning curve) বলা হয়। বেতার যন্ত্র, টেলিভিশন, মোটরগাড়ি ইত্যাদি

সংযোজনের ক্ষেত্রে সংযোজনের পরিমাণ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে তাদের প্রতি একক সংযোজনে প্রয়োজনীয় শ্রমঘণ্টার পরিমাণ কমে এবং এর প্রধান নির্ণায়ক হচ্ছে সংযোজন শ্রমিকদের অভিজ্ঞতার মাত্রা।

ধরা যাক কোন কোম্পানি একটি পণ্যের a পরিমাণ উৎপন্ন করে। কোম্পানির জন্য অভিজ্ঞতা অপেক্ষক $f(x) = ax^{\alpha}$ হলে কোম্পানিটিকে যদি পণ্যটির অতিরিক্ত b পরিমাণ উৎপাদন করতে হয় তবে তার জন্য কোম্পানির অতিরিক্ত সময় প্রয়োজন $\int_{a}^{a+b} Ax^{\alpha}dx$ শ্রমঘণ্টা।

শ্রমসময়ের এ ধরনের হিসাব ছাড়া নির্দিষ্ট সমাকলিত মানের সাহায্যে বিক্রয়ের হার (rate of sales) থেকে মোট বিক্রয়, N কিস্তির জন্য প্রতি কিস্তিতে দেয় টাকার পরিমাণ (annuity) থেকে এককালীন দেয় মোট টাকার (Amount of annuity) পরিমাণ অর্থাৎ সকল কিস্তির মোট টাকা ও তাদের জমাকৃত সুদের যোগফল ইত্যাদি নির্ণয় করা যায়।

এসব ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ নিম্নরূপ ঃ

ক. $f(x)$ = বিক্রয়ের হার হলে t পরিমাণ সময়ে মোট বিক্রয়ের পরিমাণ

$$= \int_{0}^{t} f(x)dx$$

খ. প্রতি কিস্তিতে দেয় টাকার পরিমাণ P, বার্ষিক সুদের হার r, বার্ষিক কিস্তির মোট সংখ্যা N এবং N কিস্তিতে দেয় মোট টাকার পরিমাণ (সুদ ও আসলসহ) A হলে

$$A = \int_{0}^{n} Pe^{rt} \text{ যেখানে } t \text{ সময়ের পরিমাণ (বছর)}$$

৭.২৭ একটি কারখানা 30 টি গাড়ি সংযোজনের পর হিসাব করে পেল যে কারখানাটিতে x তম গাড়ি সংযোজনের জন্য প্রয়োজনীয় শ্রমঘণ্টা $f(x) = 500x^{\frac{1}{3}}$। কারখানাটিতে অতিরিক্ত 30টি গাড়ি সংযোজন করতে হলে মোট কত শ্রমঘণ্টা বেশী সময় লাগবে ?

সমাধান ঃ অভিজ্ঞতা রেখার নিয়মানুযায়ী 30টি গাড়ি উৎপাদনের পর অতিরিক্ত 30টি গাড়ি উৎপাদন করতে মোট অতিরিক্ত সময় লাগবে

$$\int_{30}^{30+30} 500x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\left[1000x^{\frac{1}{2}}\right]_{30}^{60} = 2269 \text{ শ্রম ঘণ্টা।}$$

৭.২৮ একটি কোম্পানির বর্তমান বার্ষিক বিক্রির পরিমাণ 10 লক্ষ টাকা। কোম্পানির বিক্রি বার্ষিক 10% হারে বৃদ্ধি পেলে 5 বছরে মোট বিক্রির পরিমাণ কত হবে?

সমাধান ঃ বিক্রির হার $f(x) = 1000000e^{.1x}$; x সময়ের পরিমাণ

$$\therefore \text{ 5 বছরে মোট বিক্রির পরিমাণ } = \int_{0}^{5} 1000000e^{\frac{1}{10}x}$$

$$= \left[10\left(1000000e^{\frac{1}{10}x}\right)\right]_{0}^{5}$$

$$= 6487200 \text{ টাকা।}$$

৭.২৯ একটি ব্যাংক বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ দেয়। প্রতি বছর 3600 টাকা ঐ ব্যাংকে জমা করলে 5 বছর পর ব্যাংক থেকে মোট কত টাকা উঠানো যাবে?

সমাধান ঃ

$P = 3600$

$N = 5$

$R = .10$

$$\therefore A = \int_{0}^{5} 3600_{e}^{.10t}\,dt$$

$$= \left[10\left(3600_{e}^{\frac{1}{10}t}\right)\right]_{0}^{5}$$

$$= 23354 \text{ টাকা।}$$

অনুশীলনী - ৭

১. সমাকলন কি? সমাকলন ও অন্তরীকরণের মধ্যে পার্থক্য দেখাও।

২. সমাকলনের ধ্রুব বলতে কি বুঝায়? সমাকলনের ধ্রুবের মান অনির্দিষ্ট কেন?

৩. প্রতিস্থাপন ও আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলনের দুটি করে উদাহরণ দাও।

৪. সমাকলিত মান নির্ণয় কর ঃ

১. $\sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

২. $(1 - 2x)(1 + x)$

৩. $3x^{-1} + \frac{x^4 + 1}{x^2} + 2$

৪. $\frac{ax + x^{-3} + bx^{-5}}{kx^{-3}}$

৫. $x(x^2 + 7)^4$

৬. $x^2\sqrt{x^3 + 2}$

৭. $e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}}$

৮. $\frac{x + 1}{3 + 2x - x^2}$

৯. $\frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1}$

১০. x^2e^{3x}

১১. $n^n\log x$

১২. $\frac{x + 6}{(x - 1)(x + 2)^2}$

১৩. $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}$

১৪. $\frac{x+12}{x^2-13x+42}$

১৫. $\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

৫. প্রমাণ কর যে $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log f(x) + c$

৬. নির্দিষ্ট সমাকলন কি? নির্দিষ্ট এবং অনির্দিষ্ট সমাকলিত মানের মধ্যে প্রভেদ কি?

৭. নির্দিষ্ট সমাকলিত মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়া বর্ণনা কর।

৮. নির্দিষ্ট সমাকলনের ব্যবহারিক উপযোগিতা বর্ণনা কর।

৯. উৎপাদনের পরিমাণ x হলে যদি প্রান্তিক আয় অপেক্ষক $MR = \frac{8}{(x+2)^2} + 3$ হয় তবে মোট আয় অপেক্ষক নির্ণয় কর। এখান থেকে চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয় কর।

১০. একটি ছোট কারখানা তার উৎপাদিত একটি পণ্য বাজারজাত করতে না পারলে তার ক্ষতির পরিমাণ দাঁড়ায় 2000 টাকা। পণ্যটির প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MC = x - 58$ এবং প্রান্তিক আয় $MR = 52 - x$

ক) পণ্যটির জন্য মোট উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক নির্ণয় কর। খ) উৎপাদিত সব পণ্য বাজারজাত করা গেলে কত পরিমাণ উৎপাদনের জন্য মুনাফা বা লোকসান কোনটিই হবে না? গ) যে দুটি পরিমাণ উৎপাদনের জন্য মোট উৎপাদন ব্যয় মোট বিক্রয়লব্ধ আয়ের সমান হবে তাদের মধ্যবর্তী সব পরিমাণ উৎপাদনের জন্য মোট লাভ কত হবে?

১১. একটি পণ্যের জন্য চাহিদা বিধি $P = 100 - 3D - 2D^2$। চাহিদার পরিমাণ 6 একক হলে ভোক্তার উদ্বৃত্ত কত?

১২. সরবরাহ বিধি $P = \frac{1}{3}(x + 5)$ দেয়া থাকলে বাজারে বিক্রিত পণ্যের পরিমাণ যখন 10 একক তখন উৎপাদনের উদ্বৃত্ত কত?

১৩. একটি নতুন পণ্যের বিক্রির হার $f(x) = 100 - 40_e^{-x}$ যেখানে x পণ্যটি বাজারে ছাড়ার পর মোট দিনের সংখ্যা। 10 দিনে পণ্যটি কত পরিমাণ বিক্রি হবে?

১৪. একটি পণ্যের প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $100 - 36x + 3x^2$। স্থিরীকৃত ব্যয় 120 টাকা এবং পণ্যটির একক প্রতি মূল্য 3000 টাকা। (ক) মোট উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক

নির্ণয় কর। (খ) মোট মুনাফা অপেক্ষক কি হবে? (গ) কত পরিমাণ বিক্রি করলে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে?

১৫. প্রান্তিক আয় $\dfrac{dR}{dx} = \dfrac{ab}{(a+b)^2} - c$

R = মোট আয়,

x = পণ্যের পরিমাণ

a, b, c ধ্রুব।

চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয় কর।

[সংকেত ঃ উভয় পক্ষকে সমাকলন কর ; পণ্যের পরিমাণ $x = 0$ হলে মোট আয় $TR = 0$ ধরে $C = -a$ নির্ণয় কর। এবং $TR = p.\ x$ যেখানে p পণ্যের একক প্রতি মূল্য। এরপর চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয় কর]

১৬. একটি নতুন যন্ত্র ক্রয় করায় অতিরিক্ত আয় $R(x) = 40x - x^2$ এবং তার রক্ষণাবেক্ষণ ব্যয় $c(x) = 3x^2$ যেখানে x সময়ের পরিমাণ (মাস)। যন্ত্রটি ব্যবহারের অযোগ্য হয়ে পড়লে তার লোহালক্কড় যদি অবিক্রীত থেকে যায় তবে যন্ত্রটি কত বছর পর্যন্ত চালানো লাভজনক? এসময়ে তা থেকে অর্জিত মোট অতিরিক্ত আয়ের পরিমাণ কত?

১৭. একটি দেশের জাতীয় অর্থনীতিতে প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা $MPS = \frac{1}{5}$। জাতীয় আয়ের পরিমাণ শূন্য হলে মোট ভোগের পরিমাণ 12 কোটি ডলার। ঐ দেশের অর্থনীতির জন্য ভোগ অপেক্ষক এবং সঞ্চয় অপেক্ষক নির্ণয় কর।

১৮. একটি কারখানার শুধু প্রযুক্তিগত উপাদান ও নিয়োজিত শ্রমিক উৎপাদনে অংশগ্রহণ করে এবং তা কোন সময়ে 10,000 একক পণ্য উৎপাদন করে। অতিরিক্ত x শ্রমিক নিয়োগের ফলে যদি দৈনিক উৎপাদনের পরিমাণ $\dfrac{dP}{dx} = 200 - 3x^{\frac{1}{2}}$ হারে পরিবর্তিত হয় তবে 25 জন অতিরিক্ত শ্রমিক নিয়োগের ফলে উৎপাদনের পরিমাণ কত দাঁড়াবে?

অষ্টম অধ্যায়

সংবর্গমান

[LOGARITHM]

কোন বিবৃতি $\log_a N = x$ (যেখানে a, N এবং x তিনটি সংখ্যা) আকৃতিতে থাকলে তাকে a ভিত্তিতে N সংখ্যার সংবর্গমান সমান x পড়া হয়। কোন ভিত্তিতে (base) একটি সংখ্যার সংবর্গমান বলতে এমন একটি সূচক (index বা power) বুঝায় যা দিয়ে উক্ত ভিত্তিকে উন্নীত করলে সংখ্যাটি পাওয়া যায় অর্থাৎ $\log_a N = x$ এর অর্থ হচ্ছে $a^x = N$। সংবর্গমান গণিতের সূচক তত্ত্বেরই (theory of indices) ভিন্নরূপ। সংবর্গমানের সংজ্ঞা অন্যভাবেও দেয়া যায় ঃ

যদি কোন ধনাত্মক সংখ্যা a কে x সূচক দ্বারা উন্নীত করলে তার মান N পাওয়া যায় তবে x কে a র ভিত্তিতে N–এর সংবর্গ মান বলে অর্থাৎ

$a^x = N$ হলে $\log_a N = x$

সংবর্গমানের ভিত্তি সম্পর্কে তিনটি বিষয় লক্ষ্য রাখতে হবে (ক) ভিত্তি ঋণাত্মক কোন সংখ্যা হতে পারবে না। (খ) ভিত্তি শূন্য হতে পারবে না। এবং (গ) ভিত্তি 1 হতে পারবে না। এ ব্যতীত ভিত্তির জন্য যেকোন মান ব্যবহৃত হতে পারে তবে সাধারণত সংবর্গমানের জন্য দুটি বিশেষ মান ব্যবহার করা হয়ে থাকে ঃ একটি 10 এবং অপরটি e। যদি সংবর্গমানের ভিত্তি 10 হয় তবে তাকে সাধারণ সংবর্গমান (common logarithm) বা ব্রিগসীয় সংবর্গমান (Briggsian logarithm) এবং যদি e

$\left(e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{r!} + \ldots\right.$ অসীম সংখ্যক পদ পর্যন্ত) হয় তবে

তাকে স্বাভাবিক সংবর্গমান (natural logarithm) বা নেপিয়ারীয় সংবর্গমান (Napierian logarithm) বলে।

সংবর্গমানের ভিত্তি 10 হলে সংবর্গমান প্রকাশের সময় ভিত্তি সাধারণত লেখা হয় না অর্থাৎ log N–এর অর্থ হচ্ছে N–এর সাধারণ সংবর্গমান। আর সংবর্গমানের ভিত্তি e হলে N–এর সংবর্গমানকে লেখা হয় $\log_e N$ অথবা ln N।

সংবর্গমানের সংজ্ঞা থেকেই বুঝা যায় কোন নির্দিষ্ট মানকে নির্দিষ্ট সূচক দ্বারা উন্নীত করলে সংবর্গমানের মাধ্যমে তা প্রকাশ করা যায়। কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি বুঝানো হল ঃ

$$3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4 ; 10^2 = 100 \rightarrow \log_{10} 100 = 2 ;$$

$$25^{-2} = \frac{1}{625} \Rightarrow \log_{25} \frac{1}{625} = -2$$ ইত্যাদি।

এভাবে সূচক দ্বারা উন্নীত সংখ্যাকে সংবর্গমানে রূপান্তরিত করার প্রক্রিয়া ব্যবহার করে অনেক হিসাব সহজ করা যায় বলে ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সংবর্গমানের গুরুত্ব অপরিসীম। যেমন সাধারণভাবে $(.5321)^{99}$–এর মান নির্ণয় একটি সময়সাধ্য বিষয়, তাতে ভুল করার সম্ভাবনাও প্রচুর কিন্তু $(.5321)^{99} = x$ ধরে নিলে উভয় পক্ষের সংবর্গমান নিয়ে অর্থাৎ $\log (.5321)^{99} = \log x$ ধরে পরিমাণটি নির্ধারণ সহজ করে ফেলা যায়। তবে সে প্রসঙ্গে যাবার আগে সংবর্গমানের কতিপয় বৈশিষ্ট্য এবং সূত্র সম্পর্কে অবহিত হওয়া যাক।

সংবর্গমানের বৈশিষ্ট্য ও সূত্রসমূহ ঃ

১. কোন সংখ্যার সংবর্গমান নির্ধারণের ক্ষেত্রে যদি সংবর্গমানের ভিত্তি এবং সংখ্যা একই হয় তবে তার সংবর্গমান 1 হবে অর্থাৎ $\log_a a = 1$ [যেকোন সংখ্যা a–এর ঘাত 1 হলে $a^1 = a$ এবং সংবর্গমানে রূপান্তরিত করলে $\log_a a = 1$]

২. যেকোন ভিত্তিতে 1-এর সংবর্গমান শূন্য, অর্থাৎ $\log 1 = 0$ [কোন সংখ্যার সূচক 0 হলে তা 1–এর সমান অর্থাৎ $a^0 = 1$ এবং সংবর্গমানে, $\log_a 1 = 0$]

৩. কয়েকটি সংখ্যার গুণফলের সংবর্গমান একই ভিত্তিতে সংখ্যাগুলির আলাদা আলাদাভাবে নেয়া সংবর্গমানের যোগফলের সমান অর্থাৎ

$\log_a (x.y.z) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$

৪. দুটি আলাদা সংখ্যার ভাগফলের সংবর্গমান একই ভিত্তিতে সংখ্যাদ্বয়ের আলাদা আলাদাভাবে নেয়া সংবর্গমানের বিয়োগফলের সমান, অর্থাৎ,

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

৫. সূচক দ্বারা উন্নীত কোনো সংখ্যার সংবর্গমান ঐ সূচক এবং একই ভিত্তিতে সংখ্যাটির সংবর্গমানের গুণফলের সমান, অর্থাৎ

$\mathrm{Log}_a M^n = n \log_a M$

৬. সংবর্গমানের ভিত্তি পরিবর্তন করা যায়, সেক্ষেত্রে অনুসৃতব্য নিয়ম হচ্ছে $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ অর্থাৎ, $\log_a M$–এর ভিত্তি a থেকে b তে পরিবর্তিত করতে হলে $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$

৮.১ x–এর মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $\log_2 8 = x$; খ. $\log_{125} x = \frac{1}{3}$; গ. $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{6}$; ঘ. $\log_{27} 9 = x$

সমাধান ঃ

ক. $\log_2 8 = x \Rightarrow 2^x = 8 \to 2^x = x^3 \quad \therefore x = 3$

খ. $\log_{125} x = \frac{1}{3} \Rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = x \quad \therefore x = 5$

গ. $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{6} \to x^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2} \Rightarrow x = (\sqrt{2})^6 \quad \therefore x = 8$

ঘ. $\log_{27} 9 = x \Rightarrow 27^x = 9 \to 3^{3x} = 3^2 \Rightarrow 3x = 2 \quad \therefore x = \frac{2}{3}$

৮.২ মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $\log_3 243$; খ. $\log_{3\sqrt{2}} 5832$;

গ. $\frac{1}{2}\log_{10} 25 - 2\log_{10} 3 + \log_{10} 8$

সমাধান ঃ

ক. $\log_3 243 = \log_3 (3)^5 = 5\log_3 3 = 5 \quad (\because \log_3 3 = 1)$

ক. $\log_{3\sqrt{2}} 5832 = \log_{3\sqrt{2}} (3^6 \times 2^3) = \log_{3\sqrt{2}} (3\sqrt{2})^6$

$= 6\log_{3\sqrt{2}} 3\sqrt{2} = 6$

গ. $\frac{1}{2}\log_{10} 25 - 2\log_{10} 3 + \log_{10} 18$

$= \log_{10} 25^{\frac{1}{2}} - \log_{10} 3^2 + \log_{10} 18$

$$= \frac{1}{2}\log_{10}5 \quad \log_{10}9 + \log_{10}18$$

$$= \log_{10}\frac{5 \times 18}{9} = \log_{10}10 = 1$$

৮.৩ x–এর মান নির্ণয় কর ঃ

ক. $2^{x^2-3x} = \frac{1}{2}$; খ. $\log(x+6) + \log(x+3) = \log 2 + 3\log 3$;

গ. $\log(x-10) + \log 2x = 1$;

ঘ. $2\log_3 x + 2\log_3 x^2 + 2\log_3 x^3 + \ldots + 2\log_3 x^n = 1$

ঙ. $\log 2 + 16\log\frac{16}{15} + 12\log\frac{25}{24} + 7\log\frac{81}{80} = x - 4$

চ. $\log_{10}(x-9) + \log_{10}x = 1$

সমাধান ঃ

ক. $2^{x^2-3x} = \frac{1}{2}$ উভয় পাশের সংবর্গমান নিয়ে

$$\log 2^{x^2-3x} = \log\frac{1}{2}$$

বা, $(x^2-3x)\log 2 = \log 1 - \log 2$

বা, $(x^2-3x)\log 2 = -\log 2$ $\quad (\because \log 1 = 0)$

বা, $x^2 \quad 3x = \frac{\log 2}{\log 2}$

বা, $x^2 - 3x = -1$ অর্থাৎ $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

অন্যভাবেও প্রদত্ত সমীকরণ থেকে x–এর মান নির্ণয় করা যায়।

$2^{x^2-3x} = \frac{1}{2}$ হলে, $2^{x^2-3x} = 2^{-1}$ $\quad \therefore x^2 - 3x = -1$

$$\to x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

খ. $\log(x+6) + \log(x+3) = \log 2 + 3\log 3$

বা, $\log(x+6)(x+3) = \log(2.3^3)$

বা, $(x + 6)(x + 3) = 2.3^3 = 54$

বা, $(x + 6)(x + 3) - 54 = 0$

বা, $x^2 + 9x - 36 = 0 \Rightarrow x = 3$; $x = -12$

গ. $\log(x - 10) + \log 2x = 1$

বা, $\log(x - 10)2x = \log 10$

বা, $(x - 10)\, 2x = 10$

বা, $2x^2 - 20x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{30}$

ঘ. $2\log_3 x + 2\log_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots + 2\log_3 x^n = 1$

বাঁদিকের অংশকে অন্যভাবে লিখলে পাওয়া যায়,

$\log_3 x^2 + \log_3 x^4 + \log_3 x^6 + \ldots + \log_3 x^{2n}$

$= \log_3(x^2.x^4.x^6 \ldots x^{2n})$

$= \log_3(x^{2+4+6+\ldots+2n})$

$= \log_3 \left\{ x^{2(1+2+3+\ldots+n)} \right\}$

$= \log_3 x^{n(n+1)}$

$\left[\because 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right]$

শর্তানুসারে,

$\log_3 x^{n(n+1)} = 1 = \log_3 3$

$\therefore x^{n(n+1)} = 3$

এবং $x = 3^{\frac{1}{n(n+1)}}$

ঙ. $\log 2 + 16\log\frac{16}{15} + 12\log\frac{25}{24} + 7\log\frac{81}{80} = x - 4$

বাঁ পাশের অংশকে ভিন্নভাবে লিখলে পাওয়া যায়,

$$\log 2 + 16\log\frac{2^4}{3 \times 5} + 12\log\frac{5^2}{2^3 \times 3} + 7\log\frac{3^4}{2^4 \times 5}$$

$= \log 2 + 16[\log 2^4 - \log(3 \times 5)] + 12[\log 5^2 - \log(2^3 \times 3)] +$
$7[\log 3^4 - \log(2^4 \times 5)]$

$= \log 2 + 16[4\log 2 - \log 3 - \log 5] + 12[2\log 5 - 3\log 2 - \log 3]$
$+ 7[4\log 3 - 4\log 2 - \log 5]$

$= \log 2\,[1 + 64 - 36 - 28] + \log 3[-16 - 12 + 28] +$

$\log 5\,[-16 + 24 - 7]$

$= \log 2 + \log 5$

$= \log (2 \times 5)$

$= \log 10$

$= 1$

শর্তানুযায়ী $1 = x - 4$

$\therefore x = 5$

চ. $\log_{10}(x-9) + \log_{10} x = 1$

বা, $\log_{10}(x-9)\,x = \log_{10}10$

বা, $(x-9)\,x = 10$

বা, $x^2 - 9x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10\,;\, x = -1$

কিন্তু কোন সংখ্যা ঋণাত্মক হলে তার সংবর্গমান অনির্দিষ্ট অর্থাৎ প্রদত্ত ক্ষেত্রে $x = -1$ হলে সমীকরণে প্রদত্ত মানসমূহ অনির্দিষ্ট হয়ে পড়ে ; তাই $x = 10$

৮.৪ প্রমাণ কর যে $\dfrac{\log_3 8}{\log_9 16 \log_4 10} = 3\log_{10}2$

সমাধান ঃ $\log_3 8 = \dfrac{\log_{10}8}{\log_{10}3} = \dfrac{\log_{10}2^3}{\log_{10}3} = \dfrac{3\log_{10}2}{\log_{10}3}$

$$\log_9 16 = \frac{\log_{10}16}{\log_{10}9} = \frac{\log_{10}2^4}{\log_{10}3^2} = \frac{4\log_{10}2}{2\log_{10}3}$$

$$\log_4 10 = \frac{\log_{10}10}{\log_{10}4} = \frac{1}{\log_{10}2^2} = \frac{1}{2\log_{10}2}$$

$$\therefore \frac{\log_3 8}{\log_9 16.\log_4 10} = \frac{3\log_{10}2}{\log_{10}3} \times \frac{2\log_{10}3}{4\log_{10}2} \times 2\log_{10}2$$

$$= 3\log_{10}2$$

৮.৫ সমাধান কর ঃ $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$

সমাধান ঃ $\log_8 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^3} = \dfrac{\log_2 x}{3\log_2 2} = \dfrac{1}{3}\log_2 x$

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} = \frac{\log_2 x}{2\log_2 2} = \frac{1}{2}\log_2 x$$

$\therefore$ $\log_8 x + \log_2 x + \log_2 x = 11$ কে লেখা যায়

$\frac{1}{3}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 11$

বা, $\log_2 x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = 11$

বা, $\log_2 x\left(\frac{11}{6}\right) = 11$

বা, $\log_2 x = 6$

$\therefore$ $x = 2^6 = 64$

লক্ষণীয় যে, $\log_2\left(x.\frac{11}{16}\right) \neq \log_2 x\left(\frac{11}{16}\right)$

সংবর্গমানের ব্যবহার এবং সংবর্গমান সারণী (Logarithm tables)

ধরা যাক কোন একটি মান $(120.25)^{12}$ সমান কত নির্ণয় করতে হবে। এর জন্য 120.25-কে পরপর 12 বার গুণ করার মতো শ্রম ও সময়সাধ্য কাজ না করে সংবর্গমান প্রয়োগ করে তা সহজে নির্ণয় করা যায়। $(120.25)^{12}$-এর সংবর্গমান $= \log(120.25)^{12}$ বা $12\log(120.25)$। এখন $\log 120.25$-এর মান জানা গেলে (সংবর্গমান সারণী থেকে তা দ্রুত পাওয়া যায় সম্ভব) তাকে 12 দ্বারা গুণ করলেই উদ্দিষ্ট সংবর্গমানের সংখ্যাগত পরিমাণ পাওয়া যাবে। আর বিপরীত সংবর্গমান সারণী (antilogarithm tables) থেকে এই সংবর্গমানের পরিমাণের জন্য যে মূলমান পাওয়া যাবে তাই হবে $(120.25)^{12}$ এর মান।

বিষয়টিকে গাণিতিকভাবে উপস্থাপিত করতে হলে ধরা যাক,

$(120.25)^{12} = x$, উভয়পক্ষের সংবর্গমান নিয়ে

$\log(120.25)^{12} = \log x$ বা, $12\log(120.25) = \log x$

এখন বর্গমান সারণী থেকে $\log(120.25) = a$ হলে

$12\log(120.25) = \log x$ হবে $12 \times a = \log x$

বা, $A = \log x$, যেখান থেকে A অর্থাৎ $12 \times a$-এর বিপরীত সংবর্গমান নিয়ে

$x = \text{antilog } A = N$ (উদ্দিষ্ট মান)।

তবে সংবর্গমান সারণী এবং বিপরীত সংবর্গমান সারণী ব্যবহারের জন্য প্রাথমিকভাবে কতিপয় মৌলিক বিষয় জানতে হবে।

কোন সংখ্যার সংবর্গমানের দুটি অংশ থাকে ; একটি হচ্ছে তার পূর্ণ অংশ, অপরটি ভগ্নাংশ। যেহেতু সংবর্গমান দশমিক ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশিত হয় তাই সংবর্গমানের পূর্ণাংশ বলতে তার দশমিক বিন্দুর পূর্বের সংখ্যাকে বুঝায় আর ভগ্নাংশ বলতে বোঝায় তার দশমিক বিন্দুর পরের সংখ্যাকে। যেমন, x কোন একটি সংখ্যা হলে $\log x = 4.5734$ হতে পারে। এখানে পূর্ণাংশ 4 এবং ভগ্নাংশ .5734। সংবর্গমানের এরূপ পূর্ণাংশকে পূর্ণক (characteristic) এবং ভগ্নাংশকে অংশক (mantissa) বলে। উল্লেখ্য যে সংবর্গমান সারণীতে বিভিন্ন মানের জন্য যে সংবর্গমান দেয়া থাকে তার ভিত্তি 10 কিংবা e দুইই হতে পারে। তবে ব্যবহারিক প্রয়োজনে ভিত্তি 10 নিয়ে মান নির্ণয়ের প্রয়োগই ব্যাপক। তাই সংবর্গমান সারণী বলতে বর্তমান আলোচনায় সর্বত্র সাধারণ সংবর্গমান সারণীর কথাই বুঝানো হবে। বিপরীত সংবর্গমানের ক্ষেত্রেও এ মন্তব্যটি প্রযোজ্য। এখন দেখা যাক সংবর্গমানের পূর্ণক এবং অংশক কিভাবে নির্ধারণ করা যায়।

পূর্ণক ঃ কোন সংখ্যার সংবর্গমানের পূর্ণক নির্ধারণের সময় প্রথমেই লক্ষ্য করতে হবে প্রদত্ত সংখ্যাটির পূর্ণ অংশে কয়টি অংক (digit) আছে। সংবর্গমানের পূর্ণক হবে প্রদত্ত সংখ্যাটির পূর্ণাংশে যতটি অংক আছে তার চেয়ে এক কম। তবে কোন সংখ্যার পূর্ণাংশ যদি শূন্য হয় এবং দশমিকের পর এক বা একাধিক শূন্য থাকে তাহলে এ নিয়মের ব্যতিক্রম ঘটে। একটি তালিকার মাধ্যমে সংবর্গমানের পূর্ণকের উদাহরণ দেয়া হল ঃ

সংখ্যা	সংবর্গমানের পূর্ণক	সংখ্যা	সংবর্গমানের পূর্ণক
75	1	772.03	2
314	2	0.8	– 1
2456	3	0.08	– 2
75.12	1	0.007	– 3
1.03	0	1.007	0

সাধারণভাবে বলা যায় যে এক অপেক্ষা বড় কোন সংখ্যার সংবর্গমানের পূর্ণকের মান হবে সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর পূর্বে যতটি অংক আছে তার চেয়ে এক কম। আবার এক অপেক্ষা ছোট কোন সংখ্যার সংবর্গমানের পূর্ণক হবে সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর পরে যতটি শূন্য আছে তার এক বৈশি, তবে ঋণাত্মক মানের।

অংশক ঃ কোন সংখ্যার সংবর্গমানের অংশক হচ্ছে সংখ্যাটির সংবর্গমানে দশমিক বিন্দুর পর যে পরিমাণ থাকে সেটি। ধরা যাক log 3.47 = 0.5403। অংশকের মান যে সংখ্যার সংবর্গমান নির্ণয় করতে হবে তার দশমিক বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। অংশক সর্বদাই ধনাত্মক এবং তা পাওয়া যায় সংবর্গমান সারণী থেকে। এখানে সংবর্গমান সারণী থেকে কিভাবে অংশক নির্ণয় করা যায় তা আলোচিত হল।

প্রথমে সংবর্গমান সারণীতে কোন সংখ্যার জন্য মান দেখতে হবে তা নির্ণয় করতে হবে। সংখ্যা যদি 347, 1.03, .08, .17 ইত্যাদি হয় তবে তাদের জন্য সারণীতে যথাক্রমে 347, 103, 8, 17 প্রভৃতির মান খুঁজতে হবে। সংখ্যার প্রথম দুটি অংক দ্বারা নির্ধারিত অংশ সারণীর সারি (row) নির্দেশ করে। কোন ক্ষেত্রে সংখ্যায় যদি সব মিলে একটি অংক থাকে তবে সারির জন্য তার পরে একটি শূন্য যোগ করে দিতে হবে। যেমন .08–এর সংবর্গমান নির্ণয়ের জন্য সংবর্গমান সারণীতে সারি নির্দেশক সংখ্যা হবে 80। প্রথম দুটি অংক দ্বারা সারণীর সারি নির্ধারণের পর সারণীর প্রাপ্ত সারিতে প্রদত্ত সংখ্যার তৃতীয় অংকটি দেখে সারণীতে সংখ্যাটির অংশকের অবস্থান নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ 347-এর অংশক পাওয়া যাবে সারণীর 34–এর সারির 7–এর স্তম্ভে (column)। 347–এর ক্ষেত্রে এই মান 5403 বলে তার সংবর্গমানের অংশকে .5403 এবং 3.47–এর সংবর্গমান 0.5403 বা

$$\log 3.47 = 0.5403 \; ; \; \log 347 = 2.5403 \; ; \; \log 34.7 = 1.5403 \text{ ইত্যাদি}$$

(যে সংবর্গমান সারণী ব্যবহার করে এই মান পাওয়া গেল তাতে সংবর্গমানের অংশকের জন্য চার অংকের সংখ্যা দেয়া আছে। সংবর্গমান সারণীতে অংশকের জন্য পাঁচ অংকের সংখ্যা থাকলে তার ব্যবহার প্রাপ্ত মানকে আরও বেশী সঠিকভাবে নির্ধারণ নিশ্চিত করে)।

এখানে উদাহরণের মাধ্যমে বিভিন্ন সংখ্যার সংবর্গমান এবং সংবর্গমান নির্ণয় সংক্রান্ত আরও কিছু নিয়ম ব্যাখ্যা করা হল।

৮.৬ মান নির্ণয় কর ঃ (ক) log 54.0 (খ) log 5.01 (গ) log 0.015536 (ঘ) log 50012.76 (ঙ) log 22500 (চ) 0.00459

সমাধান ঃ (ক) log 54.0 এর জন্য পূর্ণক = 1। অংশকের জন্য সংবর্গমান সারণীর 54–এর সারিতে 0–এর স্তম্ভে দেখলে মান পাওয়া যায় 7324, অতএব অংশক = .7324

$\therefore \log 54.0 = 1.7324$

(খ) log 5.01 এর জন্য পূর্ণক = 0। অংশকের জন্য সংবর্গমান সারণীর 50–এর সারিতে 1–এর স্তম্ভ দেখলে মান পাওয়া যায় 6998. অতএব অংশক = .6998 ∴ log 5.01 = 0.6998

(গ) log 0.015536 এর ক্ষেত্রে পূর্ণক = — 2। অংশকের জন্য সংবর্গমান সারণীতে 15–এর সারিতে 5–এর স্তম্ভ দেখলে মান পাওয়া যায় 1903। কিন্তু এতে 0.0155 পর্যন্ত সংখ্যার সংবর্গমান পাওয়া যাবে। প্রদত্ত ক্ষেত্রে প্রয়োজন .015536–এর সংবর্গমান নির্ণয়। সংবর্গমান সারণীতে মধ্যক প্রভেদ (mean difference)–এর একটি অংশ আছে। প্রদত্ত সংখ্যার শেষের দিকের 36–এর জন্য এই মধ্যক প্রভেদ–এর অংশের মান প্রয়োজন। মধ্যক প্রভেদ অংশে একটি অংকের জন্য মান আছে বলে ভগ্নাংশকে নিকটতম পূর্ণসংখ্যায় উন্নীতকরণের নিয়মানুযায়ী 36–কে 40 ধরে মধ্যক প্রভেদ অংশে 15–এর সারিতে 5 এর স্তম্ভ থেকে মান পাওয়ার পর তার সঙ্গে একই সারির মধ্যক প্রভেদ–এর 4–এর স্তম্ভ থেকে পাওয়া 11 যোগ করতে হবে। (লক্ষণীয় যে মধ্যক প্রভেদ অংশে 10 থেকে 19 পর্যন্ত সারির জন্য দুটি সারি আছে। প্রদত্ত উদাহরণে 15–এর সারিতে 5–এর স্তম্ভের মান 15 এর সারির মধ্যক প্রভেদ অংশের 4–এর জন্য মানও নিতে হবে 15–এর সারির মধ্যক প্রভেদ অংশের 4–এর স্তম্ভের নিচের সারি থেকে)। এভাবে log .015536 এর অংশকের জন্য মান

.0155 এর	1903
মধ্যক প্রভেদ 4–এর	+ 11
	= 1914

সংবর্গমানের পূর্ণক = — 2 এবং সংবর্গমান = — 2 + .1914 = $\bar{2}$.1914

অর্থাৎ log .015536 = $\bar{2}$.1914

উল্লেখ্য যে সংবর্গমানের পূর্ণক ও অংশক মিলিয়ে — 2 + .1914 = – 1.8086 লিখলে ভুল হবে, তাদের আলাদা আলাদাভাবে পূর্ণক ও অংশক বুঝানোর জন্য — 2 + .1914 = $\bar{2}$.1914 লিখতে হবে।

(ঘ) log 50012.76 এর পূর্ণক = 4 অংশকের জন্য 50–এর সারিতে 0 এর স্তম্ভে মান 6990, এবং মধ্যক প্রভেদ 1 এর জন্য মান = 1

∴ log 50012.76 = 4 + .(6990 + 1) = 4.6991

(ঙ) log 22500 এর পূর্ণক = 5, অংশকের জন্য 22 এর সারিতে 5–এর স্তম্ভে মান = 3522 ∴ log 22500 = 5.3522

(চ) log 0.00459 এর পূর্ণক = – 3, 459 এর জন্য অংশক হবে 45 এর সারিতে 9 এর স্তম্ভের মান = 6618 ∴ log 0.00459 = $\bar{3}$.6618 সংবর্গমান সংক্রান্ত বিভিন্ন প্রকার সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে পূর্ণক ও অংশকসহ সংবর্গমানের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ সম্পর্কে ধারণা থাকা প্রয়োজন। কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে এখানে দেখানো হল।

৮.৭ মান নির্ণয় কর ঃ (ক) $\bar{4}.6625 + 2.4469$;
(খ) $\bar{4}.6625 - \bar{2}.7469$;
(গ) $\bar{3}.6625 \times 5$; (ঘ) $\bar{3}.6625 \div 5$

সমাধান ঃ (ক) $\bar{4}.6625 \Rightarrow -4 + .6625$

$2.4469 \rightarrow \quad 2 + .4469$

$$= -2 + 1.1094 = -2 + 1 + .1094$$
$$= -1 + .1094 = \bar{1}.1094$$

(খ) $\bar{4}.6625 \Rightarrow -4 + .6625$

$\bar{2}.7469 \Rightarrow -2 + .7469$

$+ \quad -$

$$-2 \quad 1.9156 = -2 - 1 + .9156$$
$$-3 + .9156 = \bar{3}.9156$$

(গ) $\bar{3}.6625 \Rightarrow -3 + .6625$

$\times 5$

$$-15 + 3.3125 = -15 + 3 + .3125$$
$$= -12 + .3125 = \overline{12}.3125$$

(ঘ) $\bar{3}.6625 \div 5 \Rightarrow (-3 + .6625) \div 5$

$$\Rightarrow (-5 + 2.6625) \div 5$$
$$= -1 + .5325 = \bar{1}.5325$$

বিপরীত সংবর্গমান

কোনো সংখ্যার সংবর্গমান দেয়া থাকলে সংবর্গমানের বিপরীত সংবর্গমানই হবে ঐ সংখ্যার সমান। অর্থাৎ যদি

$$\log x = n \text{ হয় তবে } x = \text{antilog } n$$

বিপরীত সংবর্গমান নির্ণয় প্রক্রিয়া সংবর্গমান নির্ণয়ের উল্টা প্রক্রিয়া তবে বিপরীত সংবর্গমান সারণী থেকে মান নির্ণয়ের সময় সংবর্গমানের শুধু অংশক ব্যবহার করা হয়। আর সংবর্গমানের পূর্ণক নির্দেশ করে বিপরীত সংবর্গমানে দশমিক বিন্দুর পূর্বে কতটি অংক থাকে। সংবর্গমানের পূর্ণকের মান যা থাকে বিপরীত সংবর্গমানে দশমিকের পূর্বে তার চেয়ে একটি অংক বেশি থাকে।

কোন নির্দিষ্ট মানের বিপরীত সংবর্গমান নির্ণয়ের জন্য বিপরীত সংবর্গমান ব্যবহারের ক্ষেত্রে অংশকের প্রথম দুটি অংক দ্বারা নির্ধারিত সংখ্যাংশ সারণীর সারি এবং তৃতীয় অংক তার স্তম্ভ, চতুর্থ অংক তার মধ্যক প্রভেদের মান নির্দেশ করবে। কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা বিপরীত সংবর্গমান নির্ণয় প্রক্রিয়া দেখানো হল।

৮.৮ $\log n = 2.0212$ হলে n এর মান কত?

$\log n = 2.0212 \therefore n = \text{antilog } 2.0212$। এখন বিপরীত সংবর্গমান সারণী থেকে antilog 2.0212 এর মান পেতে হবে। বিপরীত সংবর্গমান সারণীতে .02 এর সারির 1 এর স্তম্ভের মান = 1050

মধ্যক প্রভেদ 2–এর জন্য মান = 0

1050

কিন্তু সংবর্গমানের পূর্ণকের মান 2 ∴ বিপরীত সংবর্গমানে দশমিক বিন্দুর আগে তিনটি অংক থাকবে, অর্থাৎ

$$\text{anti log } 2.0212 = 105.0$$

বা $n = 105.0$

৮.৯ একটি সংখ্যার সংবর্গমান — 1.4678 হলে সংখ্যাটি কত?

সমাধান ঃ $-1.4678 \Rightarrow -2 + 2 - 1.4678$

$\Rightarrow -2 + .5322$

$\Rightarrow \overline{2}.5322$

অংশকের .532 এর জন্য বিপরীত সংবর্গমান	3404
এবং 2 এর জন্য মধ্যক প্রভেদ	2

	3406

পূর্ণক = $\bar{2}$, অতএব সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর আগে কোন অংক থাকবে না এবং দশমিক বিন্দুর পর একটি 0 থাকবে (যেহেতু কোন সংখ্যার দশমিকের আগে কোন অংক না থাকলে এবং দশমিকের পরে একটি 0 থাকলে তার জন্য সংবর্গমানের পূর্ণক -- 2)। এক্ষেত্রে

$$\text{antilog} - 1.4678 = 0.03406$$

অর্থাৎ সংখ্যাটি হবে 0.03406

সংবর্গমান ও বিপরীত সংবর্গমান, সংবর্গমানের বিভিন্ন প্রকার বৈশিষ্ট্য এবং সংবর্গমান ও বিপরীত সংবর্গমান সারণীর ব্যবহার ইত্যাদি জানার পর দেখা যাক কিভাবে সংবর্গমান ব্যবহার করে বিভিন্ন প্রকার গণনা ও হিসাব সম্পন্ন করা যায়।

৮.১০ . মান নির্ণয় কর : (ক) $\dfrac{628.24 \times 93.536}{3.786}$

(খ) $\left(1\ \dfrac{1}{80}\right)^{100}$; (গ) $\sqrt[3]{\dfrac{(0.36926)^2}{672.18}}$ (ঘ) $30\ \{1 + .035)^{15} - 1\}$

(ঙ) $\log_5 200$

সমাধান : (ক) ধরা যাক, $x = \dfrac{628.24 \times 93.536}{3.786}$

সেক্ষেত্রে $\log x = \log 628.24 + \log 93.536 - \log 3.786$

$= 2.798 + 1.97210 - 0.5782$

$= 4.1909$

এবং $x = \text{anti} \log 4.1909$

$= 15520$ (.1909 এর বিপরীত সংবর্গমান = 1552)

(খ) ধরা যাক $x = \left(1\ \dfrac{1}{80}\right)^{100}$

$$\log x = \log \left(1 \frac{1}{80}\right)^{100} = \log \left(\frac{81}{80}\right)^{100}$$

$$= 100 \log (81 - \log 80)$$

$$= 100\,(1.9085 - 1.9031)$$

$$= 100 \times .0054 = 0.54$$

$$\therefore \quad x = \text{anti} \log 0.54 = 3.467$$

(গ) ধরা যাক $x = \sqrt[3]{\dfrac{(0.36926)^2}{672.18}}$

$$\log x = \frac{1}{3} \log \frac{(0.36926)^2}{672.18} = \frac{1}{3}\,(2 \log 0.36926 - \log 672.18)$$

$$= \frac{1}{3}\,(2 \times \bar{1}.5674 - 2.8275)$$

$$= \frac{1}{3}\,(\bar{1}.1348 - 2.8275)$$

$$= \frac{1}{3}\,[\bar{4}.3073]$$

$$= \bar{2}.7691$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog}\, \bar{2}.7691 = .05876$$

(ঘ) ধরা যাক $x = 30\,\{(1 + .035)^{15}\}$

$$\log x = \log \{30 \times (1 + .035)^{15}\}$$

$$= \log 30 + 15 \log 1.035$$

$$= 1.4771 + 15 \times .0135$$

$$= 1.7006 \qquad \therefore\ x = \text{anti} \log 1.76006 = 50.19$$

এখন, $30\,\{1 + .035)^{15} - 1\} = 30\,(1 + .035)^{15} - 30$

$$= 50.16 - 30 = 20.19$$

(ঙ) $\log_5 200 = \dfrac{\log_{10} 200}{\log_{10} 5} = \dfrac{2.3010}{0.6990} = 3.292$

(পুনরায় log ব্যবহার করে)।

৮.১১ x–এর মান নির্ণয় কর ; (ক) $13^{3x-4}.\ 12^{x} = 3^{2-x}.\ 5^{x}$

(খ) $12040 = \frac{5.10^{10}}{x^{1.2}}$ (গ) $3^{x}.15^{2x-1} = 30^{x}.2^{2x-1}$

সমাধান ঃ (ক) উভয় পাশের সংবর্গমান গ্রহণ করে

$\log (13^{3x-4}.2^{2x}) = \log (3^{2-x}.5^{x})$

বা, $(3x-4) \log 13 + 2x \log 2 = (2-x) \log 3 + x \log 5$

বা, $3x \log 13 - 4 \log 13 + 2x \log 2 = 2\log 3 - x \log 3 + x\log 5$

বা, $x (3\log 13 + 2 \log 2 + \log 3 - \log 5) = 4 \log 13 + 2\log 3$

বা, $x(3.1{\cdot}1139 + 2.0{\cdot}3010 + 0.4771 - 0.6990)$

$= 4.1{\cdot}1139 + 2.0{\cdot}4771$

বা, $x.3{\cdot}7218 = 5.4098$

$\therefore x = \frac{5.4098}{3.7218} = 1.4535$ (পুনরায় log ব্যবহার করে)

(খ) উভয় পাশের সংবর্গমান গ্রহণ করে

$\log 12040 = \log \frac{5 \times 10^{10}}{x^{1.2}}$

$= \log 5 + 10\log 10 - 1.2 \log x$

বা, $1.2 \log x = \log 5 + 10 \log 10 - \log 12040$

$= .6990 + 10 - 4.806$

$= 5.893$

বা, $\log x = \frac{5.893}{1.2} = 4.9108$

$\therefore x = \text{anti} \log 4.9108$

$= 81430$

(গ) $\log (3^{x}.15^{2x-1}) = \log (30^{x}.2^{2x-1})$

বা, $x\log 3 + (2x-1) \log 15 = x\log 30 + (2x-1) \log 2$

বা, $x (\log 3 + 2 \log 15 - \log 30 - 2 \log 2) = \log 15 - \log 2$

বা, $x\,(0.4771 + 2.1{\cdot}1761 - 1{\cdot}4771 - 2.0{\cdot}3010) = 1{\cdot}1761 - 0{\cdot}3010$

বা, $x\,(0.7502) = 0.8751$ $\quad \therefore x = \dfrac{0.8751}{0.7502} = 1.1665$

ব্যবহারিক সমস্যা সমাধানে সংবর্গমানের প্রয়োগ

চক্রবৃদ্ধি সুদকষা (compound interest calculation), অবচিতি (depreciation), অ্যানুইটি (annuity) ইত্যাদি সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সংবর্গমানের ব্যবহার খুব সুবিধাজনক। তবে এর জন্য প্রাথমিকভাবে সংশ্লিষ্ট ধারণাসমূহ (concepts) এবং সূত্রাবলী জানা প্রয়োজন।

চক্রবৃদ্ধি সুদের হিসাব

চক্রবৃদ্ধি সুদকষায় আসল বা মুল (principal) পরিমাণকে P দ্বারা বার্ষিক সুদের হারকে (rate of interest) r দ্বারা, জমা রাখার মোট সময়কে n (বছর) দ্বারা এবং সুদ ও আসলের একত্রে মোট পরিমাণকে A দ্বারা চিহ্নিত করলে $A = P\,(1 + r)^n$

সুদ যদি বার্ষিক হিসাবে না হয়ে ত্রৈমাসিক, ষাণ্মাষিক ইত্যাদি হিসাবে গণনা হয় সেক্ষেত্রে সুদের হারও অনুরূপ সময়ের জন্য ধরতে হবে এবং n বছরের জন্য সময় n–এর মান যথাক্রমে 4n, 2n ইত্যাদি হবে।

৮.১২ 500,000 টাকার বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 4% হারে 5 বছরে কত টাকায় পরিণত হবে? মোট সুদের পরিমাণ কত হবে?

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমস্যায় P = 500,000 ; r = 4% ; n = 5

মোট সুদ ও আসলের পরিমাণ $A = P(1 + r)^n$

$= 500000\,(1 + .04)^5 = 500000\,(1.04)^5$

উভয় পক্ষের সংবর্গমান নিলে, $\log A = \log 500000 + 5\log 1.04$

$= 5{\cdot}6990 + 5.0{\cdot}0171$

$= 5{\cdot}784$

$\therefore A = \text{anti}\log 5{\cdot}784$

$= 608100$

অতএব 500,000 টাকা 5 বছরে 608,100 টাকায় পরিণত হবে এবং সুদের পরিমাণ $= 608,100 - 500,000 = 108,100$ টাকা।

৮.১৩ বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 100,000 টাকা 5 বছরে সুদ ও আসলে একত্রে দ্বিগুণ হবে?

সমাধান ঃ সুদ ও আসলের মোট পরিমাণ $A = 100,000 \times 2 = 200,000$

সুদের হার r হলে $200,000 = 100,000\,(1 + r)^5$

বা, $2 = (1 + r)^5$

বা, $\log 2 = 5 \log (1 + r)$ [উভয় পক্ষের সংবর্গমান নিয়ে]

বা, $.3010 = 5 \log (1 + r)$

বা, $\log (1 + r) = \dfrac{.3010}{5} = .0602$

$\therefore\ 1 + r = \text{anti log } .0602$

$= 1.149$

এবং $r = 1.149 - 1 = 14.9\ \%$

৮.১৪ প্রথমে দু'বছরের জন্য বার্ষিক সুদের হার 8% এবং পরবর্তীতে বার্ষিক 10% হলে এবং প্রতি ছ'মাস পরপর সুদ হিসাব করা হলে 5000 টাকার 5 বছরের মোট কত সুদ জমা হবে?

সমাধান ঃ সমস্যাটি দু'ধাপে সমাধান করতে হবে। প্রথমে দু'বছরের জন্য সুদ ও আসল (A_1) নির্ণয় করে তারপর সুদ ও আসলের এই মোট পরিমাণের উপর পরবর্তী তিন বছরের জন্য সুদ ও আসল (A_2) নির্ণয় করতে হবে। শুরুর 5000 টাকা $= P$ ধরলে 5 বছরের মোট সুদ হবে $(A_2 - P)$ টাকা।

A_1–এর জন্য সময় n–এর মান $2 \times 2 = 4$ এবং সুদের হার $r = \dfrac{8}{2}\ \%$; A_2–এর জন্য n–এর মান $3 \times 2 = 6$ এবং সুদের হার $r = \dfrac{10}{2} = 5\%$ এবং

$$A_1 = 5000\,(1 + .04)^4 = 5000\,(1.04)^4$$

$$\log A_1 = \log 5000 + 4 \log 1.04$$
$$= 3.6990 + 4.0\cdot0170$$
$$= 3.767$$

$\therefore$ $A_1 = \text{anti} \log 3.767 = 5848$ এবং

$$A_2 = 5848\ (1.05)^6$$

$$\log A_2 = \log 5848 + 6 \log 1.05$$
$$= 3.767 + 6.0212$$
$$= 3.8942$$

$\therefore$ $A_2 = \text{anti} \log 3.8942 = 7838$

এতএব মোট সুদের পরিমাণ $= 7838 - 5000$

$= 2838$

৮.১৫ ত্রৈমাসিক 12% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা 3 বছরে 6000 টাকা পরিণত হবে?

সমাধান ঃ সুদ ও আসলের পরিমাণ $a = 6000$, সময় $n = 3 \times 4 = 12$.

সুদের হার $r = 12\%$, অতএব মুল পরিমাণ টাকা P হলে

$$6000 = P\ (1 + .12)^{12} = P\ (1.12)^{12}$$

বা, $\log 6000 = \log P + 12 \log 1.12$

বা, $3.7782 = \log P + 12.0.0492$

বা, $\log p = 3.7782 - 12.0\cdot0492$

$= 3.17798$

$\therefore$ $P = \text{anti} \log 3.1798 = 1513$ টাকা।

৮.১৬ এক ব্যক্তি অপর এক ব্যক্তির নিকট 20,000 টাকা ঋণ নেয়ার সময় চুক্তিবদ্ধ হয় যে সে বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদসহ ঋণ পরিশোধ করবে। ঋণ পরিশোধের সময় ঐ ব্যক্তি মোট 27000 টাকা দিলে ঋণ পরিশোধের জন্য সে মোট কত সময় নিয়েছিল?

সমাধান ঃ $A = 27000$; $P = 20,000$; $r = 5\%$; এখন পরিশোধের জন্য সময় n বছর লাগলে

$$27000 = 20000\,(1 + .05)^n = 20000\,(1.05)^n = 20000\,(1.05)^n$$

বা, $\log 27000 = \log 20000 + n\log 1.05$

বা, $4.4314 = 4.3010 + n.0\cdot0212$

$$\therefore\ n = \frac{4.4314 - 4.3010}{0.0212} = 6.15 \text{ বছর}$$

অবিচিতি ঃ কোন ভবন বা যন্ত্রসরঞ্জামের অবিচিতির পরিমাণ হিসাব করার অর্থ হচ্ছে চক্রবৃদ্ধি হারে তাদের মূল্য হ্রাসের পরিমাণ নির্ধারণ। অবচিতির হার, সম্পদের প্রাথমিক মূল্য P এবং অবচিতির মেয়াদ n হলে অবচিতিজনিত অবমূল্যায়িত মান (depreciated value)

$$A = P(1 - d)^n$$

৮.১৭ একটি যন্ত্রের কর্মক্ষমতার মেয়াদ 12 বছর এবং তার ক্রয়মূল্য 2000 টাকা। তার অবচিতির হার বার্ষিক 10% ধরা হলে যন্ত্রটি অকেজো হবার পর লোহা লক্কড় (scrap) হিসাবে যন্ত্রটি কত টাকায় বিক্রি করা যুক্তিযুক্ত হবে?

সমাধান ঃ $P = 20,000$ $\quad A = 20000\,(1 - .10)^{12}$

$d = 10\%$ $\quad = 20000\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$

$n = 12$ $\quad \log A = \log 20000 + 12\,(\log 9 - \log 10)$

$$= 4.3010 + 12\,(0.9542 - 1)$$

$$= 4.3010 + 11.4504 - 12$$

$$= 3.7512$$

$$\therefore\ A = \text{anti}\log 3.7512 = 5639$$

অর্থাৎ লোহা লক্কড় হিসাবে অকেজো যন্ত্রটির মূল্য = 5639 টাকা।

৮.১৮ একটি কারখানা ভবনের প্রাথমিক মূল্য ছিল 250,000 টাকা। ভবনটির অবচিতির হার 4% । বর্তমান ভবনটিকে 50,000 টাকায় মূল্যায়িত করা হলে তা কত বছর আগে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে?

সমাধান ঃ $50000 = 250000\,(1 - .04)^n$

বা, $1 = 5\,(0.96)^n$

$= 5\left(\frac{96}{100}\right)^n$

বা, $\log 1 = 5 + n\,(\log 96 - \log 100)$

বা, $0 = 0.6990 + n\,(1.9823 - 2)$

$= 0.6990 + n\,(-0.0177)$

$\therefore n = \frac{-0.6990}{-0.0177} = 39.5$ বছর।

অর্থাৎ ভবনটি 39.5 বছর আগে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে।

অ্যানুইটি (annuity)

অ্যানুইটি সংক্রান্ত সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে দেখতে হবে কিস্তির (instalment) টাকা পরিশোধের সময়টি কখন ধরা হয়। যদি বার্ষিক কিস্তির টাকা প্রতি বছরের শুরুতে পরিশোধযোগ্য তবে তাকে বলা হয় annuity due এবং যদি তা প্রতি বছরের শেষে পরিশোধযোগ্য হয় তবে তাকে বলা হয় annuity immediate।

প্রতি বার্ষিক কিস্তির টাকার পরিমাণ A, বার্ষিক সুদের হার i এবং কিস্তির সংখ্যা n হলে এবং সকল কিস্তিতে পরিশোধযোগ্য পরিমানের বর্তমান মূল্যের (present vlaue) যোগফল V হলে

Annuity immediate–এর ক্ষেত্রে $V = \frac{A}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$ এবং n–তম বছরের শুরুতে পরিশোধযোগ্য A–এর বর্তমান মূল্য $= \frac{A}{(1+i)^n}$ কিন্তু Annuity due–এর ক্ষেত্রে $V = A + \frac{A}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$ এবং n–তম বছরের শুরুতে পরিশোধযোগ্য A–এর বর্তমান মূল্য $= \frac{a}{(1+i)^{n-1}}$। এছাড়া Annuity due এবং Annuity immediate উভয় ক্ষেত্রেই $V < A.\,n$

আবার প্রতি বার্ষিক কিস্তিতে A পরিমাণ টাকা দিলে যদি সুদের হার i হয় তবে n বছরে দেয় টাকার সুদ ও আসলসহ সকল কিস্তির মোট পরিমাণ অর্থাৎ amount of annuity M হবে annuity imediate–এর জন্য

$$M = \frac{A}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\}$$, কিন্তু annuity due–এর জন্য

$$M = \frac{A}{i}(1+i)\left\{(1+i)^n - 1\right\}$$

[অ্যানুইটি সংক্রান্ত হিসাবে জেনে রাখা ভাল যে প্রতি কিস্তিতে নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা পরিশোধযোগ্য হলে n কিস্তিতে মোট পরিশোধযোগ্য অর্থের পরিমাণ (M) হবে সকল কিস্তিতে পরিশোধযোগ্য টাকা এবং পরিবর্তিত পরিমাণসমূহের উপর সুদের যোগফলের সমান। এবং সমাকলনের মাধ্যমে

$$M = \int_0^n Ae^{rt}\,dt$$ যেখানে t কিস্তির সংখ্যা, n দ্বারা নির্দিষ্ট]

৮.১৯ এক ব্যক্তি বার্ষিক শতকরা 5 টাকা হারে মোট 7 কিস্তিতে পরিশোধ করবে বলে অপর এক ব্যক্তির নিকট 50000 টাকা ঋণ গ্রহণ করে। তাকে ঋণ পরিশোধের জন্য প্রতি কিস্তিতে কত টাকা হিসাবে দিতে হবে? প্রতি কিস্তির বছরের শেষে পরিশোধযোগ্য।

সমাধান ঃ ধরা যাক, প্রতি কিস্তির টাকার পরিমাণ = A, প্রতি কিস্তিতে দেয় টাকাকে অ্যানুইটি ধরলে, শর্তানুযায়ী, অ্যানুইটিসমূহের বর্তমান মূল্য = 50000 এবং কিস্তির টাকা প্রতি মেয়াদের শেষে পরিশোধযোগ্য।

$$\therefore\ 50000 = \frac{A}{.05}\left\{1 - \frac{1}{(1+.05)^7}\right\}$$

$$= \frac{A}{.05}(1 - .7106)$$

$$= \frac{A}{.05}(.2894)$$

$$\therefore\ A = \frac{50000 \times .05}{.2894}$$

ধরা যাক, $x = \frac{1}{(1+.05)^7}$

$$\Rightarrow \log x = -7\log(1.05)$$

$$= -7.0\cdot 0212$$

$$= -0.1484$$

$$= -1 + 1 - 0.1484$$

$$= \bar{1}.8516$$

$$\therefore\ x = \text{anti}\log \bar{1}.8516 = .7106$$

$$= 8638.56$$ (পুনরায় log ব্যবহার করে।)

৮.২০ **পেনসন প্রাপ্তির বয়স 60 বছর হলে যদি কোন ব্যক্তি মাসিক 1500 টাকা হারে পেনসন পায় এবং পেনসনের টাকা বছরে দু'কিস্তিতে পরিশোধযোগ্য হয় তবে কিস্তিতে 15 বছর ধরে পেনসন না নিয়ে একবারে পেনসনের পুরো টাকা নিতে চাইলে পেনসন প্রাপ্তির দিন ঐ ব্যক্তির মোট কত পাওনা হবে? (সুদের হার 5%)।**

সমাধান : প্রতি কিস্তির টাকার পরিমাণ = 1500 × 6 = 9000 ; সুদের হার (ষাণ্মাষিক) $i = \frac{.05}{2} = .025$; কিস্তির সংখ্যা n = 15 × 2 = 30। কিস্তির টাকা প্রতি মেয়াদের শেষে পরিশোধ যোগ্য : অতএব

$$V = \frac{9000}{.025}\left\{1 - \frac{1}{(1+.025)^{30}}\right\}$$

$$= \frac{9000}{.025}(1 - 0.4779)$$

$$= 1,87,956$$

ধরা যাক $x = \frac{1}{(1+.025)^{30}}$

$$\log x = -30 \log (1.025)$$

$$= -30.0.0107$$

$$= -.321$$

$$= -1 + 1 - .321 = \bar{1}.679$$

$$\therefore x = \text{anti log } \bar{1}.679$$

$$= 0.4779$$

৮.২১ সুদের হার 4% হলে 15 বছর ধরে প্রতি বছরের শেষে 2000 টাকা হিসাবে জমা দিলে মোট কত পরিমাণ টাকা জমা হবে? প্রতি বছরের শুরুতে একই পরিমাণ টাকা দিলে জমার মোট পরিমাণ কত হবে?

সমাধান : A = 2000, n = 15, i = 4%

বছরের শেষে কিস্তির টাকা দিলে জমার মোট পরিমাণ হবে

$$M = \frac{2000}{.04}\left\{(1+.04)^{15} - 1\right\}$$

$$M = \frac{2000}{.04}(1.8 - .1)$$
$$= \frac{2000}{.04}(0.8)$$
$$= 40000 \text{ টাকা}$$

ধরা যাক $x = (1 + .04)^{15}$

$\log x = 15 \log 1.04$

$= 15.0{\cdot}0170$

$= 0.255$

$\therefore\ x = \text{anti} \log 0.255 = 1.8$

কিন্তু কিস্তির টাকা প্রতি মেয়াদের শুরুতে দিলে মোট জমার পরিমাণ হবে

$$M = \frac{2000}{.04}\ (1 + .04)\ \{(1 + .04)^{15} - 1\}$$
$$= \frac{2000}{.04}\ (1.04)\ (0.8)$$
$$= 41600$$

৮.২২ অবচিতিজনিত কারণে অকেজো হয়ে যাওয়া 2000 টাকা মূল্যের একটি যন্ত্র পুনস্থাপনের জন্য কোন কারখানা তার মুনাফা থেকে নিয়মিত বার্ষিক কত টাকা হারে সরিয়ে রাখলে যন্ত্রটির আয়ুষ্কাল শেষে তাকে পুনস্থাপন করার টাকা পাওয়া যাবে? (অকেজো যন্ত্রটি লোহা লক্কড় হিসেবে বিক্রি করে 4000 টাকা পাওয়া যায়। তাছাড়া যন্ত্রটির আয়ুষ্কাল 20 বছরে তার মূল্য 30% বৃদ্ধি পায়, সুদের হার বার্ষিক 3%)।

সমাধান ঃ বর্তমান ক্রয়মূল্য 20,000 টাকা $\therefore$ 20 বছর পরে মূল্য $= 20000 \times 1.30 = 26000$

লোহালক্কড়ের মূল্য $= 4000$

অতএব মোট জমা হতে হবে, $26000 - 4000 = 22000$ টাকা।

এখন $M = 22000$, $n = 20$ এবং $i = 3\%$ এর জন্য প্রতিবার্ষিক কিস্তির পরিমাণ A নির্ণয় করতে হবে।

$$22000 = \frac{A}{.03}\{(1 + 0.3)^{20} - 1\}$$
$$= \frac{A}{0.3}\ (1.803 - 1)$$

ধরা যাক, $x = (1 + .03)^{30}$

$\log x = 20 \log 1.03$

$= \frac{A}{.03}(0.803)$

$\therefore\ A = \frac{22000 \times .03}{0.803} = 822$ টাকা

$= 20.0{\cdot}0128$

$= 0.256$

$\therefore\ x = \text{antilog } 0.256 = 1.803$

৮.২৩ একটি ব্যাংকে 12% হারে সুদে দিলে যদি ঐ ব্যাংকে প্রতি বার্ষিক কিস্তিতে 10000 টাকা হিসাবে 5 বছর ধরে টাকা জমা করা যায় তবে 5 বছরে মোট কত টাকা জমা হবে ?

সমাধান ঃ $A = 10{,}000$; $n = 5$; $r = 12\%$ $\therefore\ M = \int_0^5 10000_e{}^{.12t}\,dt$

$$= \frac{10000(e^{0.6} - 1)}{.12}$$

$$= \frac{10000\ (1.823 - 1)}{.12}$$

$= 68583$ টাকা।

[log–এর সাহায্যে $e^{0.6} = (2.718)^{0.6} = 1.823$]

অনুশীলনী - ৮

১. কোন সংখ্যার সংবর্গমান বলতে কি বুঝায়? সংবর্গমান ও সূচকের মধ্যে সম্পর্ক কি ?

২ সংবর্গমানের ভিত্তি সম্পর্কে ধারণা দাও। বিভিন্ন প্রকার বিশেষ ভিত্তির উদাহরণ দাও এবং ভিত্তি পরিবর্তনের কয়েকটি নমুনা উল্লেখ কর।

৩. সংবর্গমানের বৈশিষ্ট্যসমূহ বর্ণনা কর।

৪. সংবর্গমান ও বিপরীত সংবর্গমান সারণী ব্যবহার করে $x = (.0529)^{14}$–এর মান নির্ণয় প্রক্রিয়াটি বিবৃত কর।

৫. সংবর্গমানের পূর্ণক এবং অংশক কি? পূর্ণক ও অংশক সংবলিত বিভিন্ন প্রকার সংবর্গমানের যোজন, বিয়োজন, পুরণ ও বিভাজন প্রক্রিয়া উদাহরণসহ বুঝাও।

৬. সংবর্গমান বা বিপরীত সংবর্গমান সারণীর মধ্যক প্রভেদ সম্পর্কে ধারণাটি বুঝাও এবং তার ব্যবহারিক উপযোগিতা দেখাও।

৭. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 5% সুদহারে 5000 টাকার 5 বছরের সুদের পরিমাণ কত? 5% সরল সুদের হিসাবে সুদ ও আসলের মোট পরিমাণ কত? বার্ষিক একই সুদহারে প্রতি ছয়মাস পরপর সুদ হিসাব করলে 5 বছর পর উক্ত আসল থেকে মোট কত সুদ পাওয়া যাবে?

৮. আসলের পরিমাণ 5000 টাকা, সুদের চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% হলে এবং প্রথম 2 বছর প্রতি এক বছর পরপর এবং পরবর্তীতে প্রতি ছয় মাস পরপর সুদের হিসাব করলে 5 বছরে মোট সুদের পরিমাণ কত হবে?

৯. এক ব্যক্তি কিছু পরিমাণ টাকা ঋণ দিয়ে শর্ত আরোপ করল যে সে প্রথম তিন বছর বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে এবং পরবর্তীতে বার্ষিক 7% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ নেবে। 7 বছর পর ঐ ব্যক্তি 11,500 টাকা ফেরত পেলে সে মোট কত টাকা ঋণ দিয়েছিল?

১০. এক ব্যক্তি মৃত্যুকালে তাঁর তিন ছেলের জন্য 120,000 টাকা বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদহারে ব্যাংকে গচ্ছিত রেখে যান এবং নির্দেশ দেন যেন তাঁর ছেলেরা প্রত্যেক 25 বছর পূর্ণ হলে এই টাকার সুদ ও আসল থেকে সমান পরিমাণ টাকার অংশ পায়। ঐ ব্যক্তির মৃত্যুকালে প্রথম ছেলের বয়স 20 বছর, দ্বিতীয় ছেলের 15 বছর এবং তৃতীয় ছেলের 10 বছর হলে একেকজন কত টাকা হিসাবে পাবে?

১১. বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি সুদহারে কোন পরিমাণ টাকা কত বছরে সুদ ও আসলে একত্রে দ্বিগুণ হবে?

১২. একটি যন্ত্রের অবচিতির হার বার্ষিক 12%। যন্ত্রটির ক্রয়মূল্য 20000 টাকা এবং আয়ুষ্কাল 15 বছর। আয়ুষ্কাল শেষে বিকল যন্ত্রটি লোহা লক্কড় হিসাবে কত টাকায় বিক্রি করলে তার মালিক 1000 টাকা অতিরিক্ত আয় করবে?

১৩. একটি ভবনের অবিচিতির হার বার্ষিক 7%। কত বছরে ভবনটির মূল্য তার প্রাথমিক মূল্যের এক পঞ্চমাংশ হবে?

১৪. কোন ব্যাংকে বার্ষিক 5% সুদ হারে কত টাকা জমা রাখলে প্রতি বছর 1000 টাকা আয় করা যাবে?

১৫. একটি যন্ত্রের ক্রয়মূল্য 75000 টাকা এবং তার আয়ুষ্কাল 20 বছর আয়ুষ্কাল শেষে যন্ত্রটির লোহালককড় 5000 টাকায় বিক্রি করা গেলে এবং ততদিনে যন্ত্রটির মূল্য অপরিবর্তিত থাকলে তা পুণস্থাপনের জন্য প্রতি বছরের লাভ থেকে কোম্পানিটিকে কত টাকা হিসাবে আলাদা করে রেখে দিতে হবে? (সুদের হার 4%)

১৬. 12 বছর ধরে প্রতি কিস্তিতে 2000 টাকা হিসাবে টাকা জমা দিলে কিস্তির টাকা সমূহের মোট বর্তমান মূল্য এবং জমা টাকার মোট পরিমাণ কত? (সুদের হার $4\frac{1}{2}\%$)

১৭. এক ব্যক্তি 10,000 টাকা ধার নেয়ার পর বার্ষিক 6% সুদহারে 15টি সমান কিস্তিতে তা পরিশোধ করতে চাইলে এবং কিস্তির টাকা প্রতি বছরের শুরুতে পরিশোধ করতে হলে প্রতি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। কিস্তির টাকা প্রতি বছরের শেষে দিতে হলে প্রতি কিস্তির পরিমাণ কত হবে?

১৮. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 9% হলে কোন পরিমাণ টাকা কত বছরে তিনগুণ হবে?

১৯. প্রতি তিনমাস অন্তর অন্তর সুদ হিসাব করলে বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 9% সুদহারে 5000 টাকা কত বছরে 15000 টাকায় পরিণত হবে?

২০. একটি গাড়ির ক্রয়মূল্য 220000 টাকা এবং তার অবচিতির হার বার্ষিক 13%। 10 বছর পর গাড়িটির মূল্য কত হবে?

নবম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমাবেশ

[PERMUTATION AND COMBINATION]

কোন সমষ্টি থেকে কয়েকটি বা সবকটি উপাদান নিয়ে তাদেরকে নিজেদের মধ্যে পরস্পরের তুলনায় অবস্থান পরিবর্তন করিয়ে বিভিন্নভাবে সাজানো যায়। আবার তাদের কয়েকটি বা সবকটিকে নিয়ে বিভিন্ন গ্রুপ বা সমাহার তৈরি করা যায়। বিন্যাস বলতে কিছু সংখ্যক উপাদানের (ব্যক্তি বা বস্তুর) কতিপয় অথবা সবকটি নিয়ে তাদেরকে যত বিভিন্ন প্রকারে সাজানো যায় তাই বুঝায়। এবং সমাবেশ বলতে বুঝায় সমষ্টি থেকে কয়েকটি বা সবকটি দিয়ে কতটি বিভিন্ন প্রকার সমাহার তৈরি করা যায়।

ধরা যাক p, q এবং r তিনটি বস্তু দেয়া আছে। তাদের থেকে এক বারে একটি করে নিয়ে p, q এবং r তিনটি ভিন্ন উপায়ে সাজানো যায়, দুটি করে নিয়ে pq, qp, pr, rp, qr এবং rq এই ছয় উপায়ে সাজানো যায়। আবার তিনটিকেই একত্রে নিলে pqr, prq, qpr, qrp, rpq এবং rqp এই ছয় উপায়ে সাজানো যায়। অর্থাৎ তিনটি ভিন্ন বস্তুর সমষ্টি থেকে প্রতি বার একটি নিয়ে তিনটি, দুইটি নিয়ে ছয়টি এবং তিনটি নিয়ে ছয়টি বিভিন্ন বিন্যাস তৈরি হয়।

সমাবেশের ক্ষেত্রে যেহেতু কটি সমাহার তৈরি হয় তা বুঝানো হয়, তাই সমাবেশ নির্ণয়ের সময় বস্তুসমূহের একে অপরের তুলনায় অবস্থান বিবেচনা করা হয় না। p, q এবং r-এর সমষ্টি থেকে একবারে একটি নিলে সমাবেশ পাওয়া যাবে তিনটি (অর্থাৎ p, q এবং r), একবারে দুটি নিলে সমাবেশ পাওয়া যাবে তিনটি (অর্থাৎ pq বা qp, pr বা rp এবং qr বা rq) আর তিনটি একত্রে নিলে সমাবেশ পাওয়া যাবে মাত্র একটি (অর্থাৎ pqr)।

বিন্যাস ও সমাবেশ সংক্রান্ত ধারণা অর্জনের শুরুতে গণনার একটি মৌলিক নিয়ম (fundamental rule of counting) জানা প্রয়োজন। এই নিয়মটি হচ্ছে, যদি কোন একটি কাজ p সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা যায় এবং অপর একটি কাজ q সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা যায় তবে দুটি কাজ সর্বমোট $p \times q$ সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা যায়।

ধরা যাক, এক ব্যক্তি ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম যাবে এবং চট্টগ্রাম থেকে আবার ঢাকায় ফিরে আসবে। ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম যাবার জন্য সড়কপথ, রেলপথ, নদীপথ ও বিমান পথ এই চারটির যেকোনোটিই ব্যবহার করা যেতে পারে অর্থাৎ ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম যাত্রার কাজটি চারটি ভিন্ন উপায়ে সম্পাদিত হতে পারে। আবার একইভাবে চট্টগ্রাম থেকে ঢাকা ফিরে আসার কাজটিও চারটি ভিন্ন উপায়ে সম্পাদন করা যায়। অতএব ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম গিয়ে ফিরে আসার জন্য (দুটি কাজ সম্পাদনের জন্য মোট উপায় আছে $4 \times 4 = 16$টি। এখন যদি এমন হয় যে উক্ত ব্যক্তি যে পথে চট্টগ্রাম যাবেন সে পথে ঢাকা ফিরবেন না তবে তার জন্য যাওয়া এবং আসা দুটি কাজের মোট উপায় থাকবে $4 \times 3 = 12$টি

টেলিফোন নম্বর সংক্রান্ত একটা সমস্যার কথা ধরা যাক। টেলিফোন নম্বরসমূহে 0 থেকে 9 পর্যন্ত 10টি অংক থাকে। দুই অংকের টেলিফোন নম্বর হলে 0 দিয়ে শুরু এমন টেলিফোন নম্বরের সংখ্যা 9 টি অর্থাৎ $(10-1)^{2-1} = 9^1$ কিন্তু যেকোন অংক দিয়ে শুরু দুই অংকের মোট নম্বরের সংখ্যা 100 অর্থাৎ 10^2 (টেলিফোন নম্বরে কোন একটি অংক নম্বরে যতটি অংক ততবারই পুনরাবৃত হতে পারে বিবেচনা করে 0 থেকে 9 পর্যন্ত 10টি অংক নিয়ে দুই অংকের মোট কতটি ভিন্ন ভিন্ন নম্বর হতে পারে তা নিজেরা পরীক্ষা করে দেখ)।

টেলিফোন নম্বর যদি 0 দিয়ে শুরু না করতে চাই তবে 0 থেকে 9 পর্যন্ত দশটি অংক ব্যবহার দুই অংকের মোট টেলিফোন নম্বর পাওয়া যাবে $10^2—9^1 = 91$ টি। এই সংখ্যা কোন মাঝারি আকারের সংস্থার অভ্যন্তরীণ যোগাযোগের টেলিফোন নম্বরসমূহের জন্য যথেষ্ট বলে তেমন সংস্থার অভ্যন্তরীণ যোগাযোগের নম্বর দুই অংকের হলেই চলে। যদি তিন অংকের টেলিফোন নম্বর চালু করা যায় তবে 0 দিয়ে শুরু নয় এমন মোট নম্বর পাওয়া যাবে $10^3 - 9^2 = 1019$। এর অর্থ হচ্ছে কোন সংস্থা যদি অভ্যন্তরীণ যোগাযোগের জন্য টেলিফোন ব্যবস্থা চালু করে এবং প্রদত্ত টেলিফোন নম্বরসমূহে তিনটি অংক থাকে তবে সংস্থাটি সর্বোচ্চ 1019টি নম্বর দিতে পারবে। বাংলাদেশের বহু সংস্থারই অভ্যন্তরীণ যোগাযোগের জন্য 1000টির বেশি অভ্যন্তরীণ টেলিফোনের প্রয়োজন হয় না। একারণেই সেসব সংস্থায় অভ্যন্তরীণ টেলিফোন নম্বরের তিনটি অংক থাকে ।

ঢাকা শহরে টেলিফোন নম্বর ছয় অংকের করার পেছনেও অনুরূপ যুক্তি কাজ করে। 0 দিয়ে শুরু নয় এমন ছয় অংকের টেলিফোন নম্বরের সর্বোচ্চ সম্ভাব্য সংখ্যা = $10^6 - 9^5 = 940951$ যা ঢাকার জন্য পর্যাপ্ত। কিন্তু পাঁচ অংকের নম্বর ব্যবহার করলে টেলিফোন দপ্তর মোট সংযোগ দিতে পারত $10^5 - 9^4 = 98439$টি যা ঢাকার জন্য মোটেই পর্যাপ্ত নয়।

উপরে বর্ণিত উদাহরণটি গণনার অপর একটি মৌলিক নিয়ম অনুসরণ করে। সে নিয়মটি হচ্ছে, পুনরাবৃত্তি ঘটলে কোন সমষ্টির N সংখ্যক বিভিন্ন উপাদান থেকে r সংখ্যক উপাদান নিয়ে তাদেরকে মোট N^r বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যায়। এখানে গণনার মৌলিক নিয়ম ব্যবহারের দুটি উদাহরণ দেওয়া হল :

৯.১ একটি রিং তালায় মোট তিনটি রিং আছে এবং প্রতিটি রিং এ 0 থেকে 9 পর্যন্ত 10টি অংক আছে। তালাটি সর্বমোট কত বিভিন্ন নম্বরে বন্ধ করা যেতে পারে?

সমাধান : যেহেতু মোট রিং-এর সংখ্যা 3, তালাবন্ধের অন্য নম্বরেও মোট 3টি অংক থাকবে। প্রতিটি রিং-এ 10টি বিভিন্ন অংকের প্রতিটি সর্বোচ্চ তিনবার পর্যন্ত পুনরাবৃত হতে পারে এবং মোট বিভিন্ন নম্বরের সংখ্যা হবে $10^3 = 1000$

৯.২ এক সারিতে বসানো 7টি চেয়ারে 4 জন লোক কত বিভিন্ন প্রকারে বসতে পারে?

সমাধান : প্রথম ব্যক্তিটি 7টির যে কোনটিতে বসতে পারে বা 7 বিভিন্ন প্রকার উপায়ে বসতে পারে। দ্বিতীয় ব্যক্তিটি অবশিষ্ট 6টি চেয়ারে 6 বিভিন্ন উপায়ে বসতে পারে তৃতীয় ব্যক্তি অবশিষ্ট 5টিতে 5 বিভিন্ন প্রকারে বসতে পারে এবং চতুর্থ ব্যক্তিটি অবশিষ্ট 4 চেয়ারে 4 বিভিন্ন উপায়ে বসতে পারে। অতএব তাদের মোট বিভিন্ন প্রকারে বসার উপায়ের সংখ্যা হবে $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

গণনার মৌলিক নিয়ম ব্যবহার করে এভাবে বিন্যাস বা সমাবেশ সংক্রান্ত সমস্যাদির সমাধান সময়সাপেক্ষ এবং শ্রমসাধ্য। তাই গণনার মৌলিক নিয়মকে ভিত্তি হিসাবে ব্যবহার করে বিন্যাস ও সমাবেশের জন্য নির্ধারিত সূত্র প্রণয়ন করা হয়েছে। এসব সূত্রের একটি গুরুত্বপূর্ণ উপাদান হচ্ছে গৌণিক (factorial)। n-একটি যেকোন স্বাভাবিক পূর্ণ সংখ্যা হলে গৌণিক n বলতে এক থেকে n পর্যন্ত সকল স্বাভাবিক পূর্ণ সংখ্যার গুণ ফলকে বুঝায় এবং গৌণিক n কে n! দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সংজ্ঞানুযায়ী,

$n! = 1.2.3.4 \ldots (n-2).(n-1).n$ অথবা

$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$

বিন্যাসের মূল সূত্রটির বর্ণনা নিম্নরূপ : n এবং r দুইটি পূর্ণসংখ্যা এবং $r \leq n$ হলে, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু নিয়ে যত বিভিন্ন সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তাকে অর্থাৎ n সংখ্যক বস্তু থেকে নেয়া r সংখ্যক বস্তুর বিন্যাসের সংখ্যাকে ${}^np_r$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং

$$^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$\Big[\ ^{n}p_{r} = n(n-1)(n-2) \ldots \ldots r$ তম গুনিতক পর্যন্ত

$= n(n-1)(n-2) \ldots \ldots \{n-(r-1)\}$

$= n(n-1)(n-2) \ldots \ldots (n-r+1)$

$= \dfrac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2) \ldots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2) \ldots \ldots 3.2.1}$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!}\Big]$

বিন্যাস সংক্রান্ত কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ মান

1. $^{n}P_{n} = n(n-1)(n-2) \ldots \ldots n$-তম গুণিতক পর্যন্ত

$= n(n-1)(n-2) \ldots \ldots \{n-(n-1)\}$

$= n(n-1)(n-2) \ldots \ldots 1$

$= n(n-1)(n-2) \ldots \ldots 3.2.1$

$= n!$

2. $^{n}P_{n-1} = \dfrac{n!}{\{n-(n-1)\}!}$ $\qquad (\because\ ^{n}P_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$= \dfrac{n!}{(n-n+1)!}$

$= \dfrac{n!}{1!}$

$= n!$

অর্থাৎ $^{n}P_{n-1} = {}^{n}P_{n} = n!$

3. $^{n}P_{n} = n!$

আবার $^{n}P_{n} = \dfrac{n!}{(n-n)!}$

$$= \frac{n!}{0!}$$

$$\therefore n! = \frac{n!}{0!} \rightarrow 0! = 1$$

4. $^nP_r = n \times {}^{n-1}P_{r-1}$

প্রমাণ ঃ $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

এবং $n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$

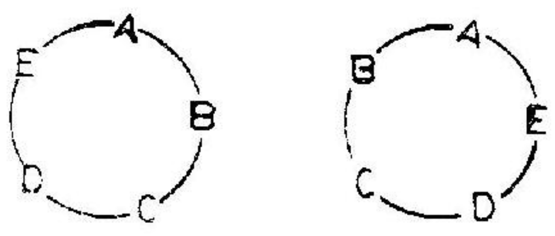
$$= n \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\therefore {}^nP_n = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times {}^{n-1}P_{r-1}$$

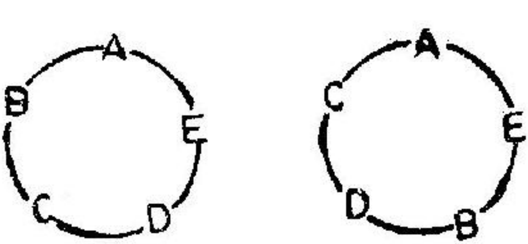
বৃত্তাকার বিন্যাস (Circular permutation)

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্যে r সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রথমে বস্তুসমূহের অবস্থানের প্রকৃতি সম্পর্কে নিশ্চিত হতে হবে। তাদের অবস্থান সারিতে হতে পারে আবার বৃত্তাকার রেখা বরাবর হতে পারে। উপরের সূত্রসমূহ বৃত্তাকার বিন্যাসের বেলায় প্রযোজ্য নয়। বৃত্তাকার বিন্যাসের প্রধান বৈশিষ্ট্য হচ্ছে যে পরস্পরের তুলনায় অবস্থানের ক্রম না পাল্টিয়েও বস্তুসমূহের দু'প্রকার বিন্যাস হতে পারে। চিত্রটি লক্ষ্য কর ঃ



[চিত্র ঃ ৮]

চিত্রে প্রদর্শিত বিন্যাস দুটি মূলত একে অপরের থেকে পৃথক নয় কেননা উভয় ক্ষেত্রেই বস্তুসমূহের পরস্পরিক অবস্থানের ক্রম অপরিবর্তিত রয়ে গেছে। এভাবে, বস্তুসমূহের অবস্থান পাল্টিয়েও পারস্পরিক ক্রম অপরিবর্তিত রেখে তাদের বিভিন্ন অবস্থানের জন্য একই প্রকার বিন্যাস পাওয়া সম্ভব। তাই ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস পাবার জন্য বস্তুসমূহের কোন একটিকে একটি অবস্থানে স্থির রাখতে হবে। নিচে তা প্রয়োগ করে ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাসের উদাহরণ দেখানো হল।



[চিত্র ঃ ৯]

দেখা যাচ্ছে n সংখ্যক বস্তুর সবকটি একত্রে নিয়ে তাদের বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যা $^{n}P_{n}$ নয়, একটির অবস্থান স্থির থাকার কারণে তাদের বিন্যাসের সংখ্যা হবে $^{n-1}P_{n-1}$ অর্থাৎ $(n-1)!$

৯.৩ 4 জন ছেলে এবং 4 জন মেয়েকে একটি গোলটেবিল ঘিরে বসতে দিলে যদি দুটি ছেলে কখনোই পাশাপাশি না বসে তবে তারা সবাই কত বিভিন্ন উপায়ে বসতে পারে?

সমাধান ঃ যেহেতু কোন দু'জন ছেলে পাশাপাশি বসতে পারবে না, ছেলেদের আসন থাকবে দুজন মেয়ের মাঝখানে. গোল টেবিল ঘিরে 4 জন মেয়ে মোট $(4-1)!$ উপায়ে বসতে পারে এবং 4 জনের প্রতি জোড়া মেয়ের মাঝের 4টি আসনে 4 জন ছেলে মোট 4 ! উপায়ে বসতে পারে। অতএব সকলে (মোট $(4-1)! \times 4!$ বিভিন্ন উপায়ে বসতে পারে এবং $(4-1)! \times 4! = 3! \times 4!$

$$= 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 144$$

বিন্যাস নির্ণয়ের ক্ষেত্রে এমন শর্ত দেয়া হতে পারে যে n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে তাদের বিন্যাস নির্ণয় করতে বলা হল ঠিকই কিন্তু বলে দেয়া হল যে r সংখ্যক বস্তুর মধ্যে নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু অন্তর্গত হবে না কিংবা, তাদের নির্দিষ্ট q সংখ্যক বস্তু অবশ্যই থাকবে। এ জাতীয় বিন্যাসকে সীমাবদ্ধ বিন্যাস (restricted permutation) বলা হয়। এমন বিন্যাসের ক্ষেত্রে যদি p সংখ্যক বস্তু অন্তর্গত না হয় তবে বিন্যাসের সংখ্যা হবে $^{n-p}p_r$ আর যদি q সংখ্যক বস্তু অন্তর্গত হয় তবে বিন্যাসের সংখ্যা হবে $^{n-q}p_{r-q} \times {}^{r}p_q$

আবার কোন ক্ষেত্রে এমন হতে পারে যে মোট n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে একই জাতীয় কয়েকটি করে বস্তু আছে অর্থাৎ কোনো এক প্রকারের বস্তুর সংখ্যা x, অপর এক প্রকারের y এবং তৃতীয় এক প্রকারের z আর বাকিগুলি প্রত্যেক ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের। সেক্ষেত্রে n সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে নিয়ে বিভিন্ন প্রকারে সাজালে মোট বিন্যাসের সংখ্যা হবে

$$^{n}p_n = \frac{n\,!}{x!y!z!}$$

এখানে বিন্যাস সংক্রান্ত বিভিন্ন প্রকার সমস্যা সমাধানের কয়েকটি উদাহরণ দেয়া হল।

৯.৪ Company শব্দটি থেকে 4 টি বিভিন্ন অক্ষর নিয়ে মোট কতটি শব্দ তৈরি করা যেতে পারে? (শব্দগুলির অর্থ নাও থাকতে পারে)।

সমাধান ঃ Company শব্দে মোট ভিন্ন ভিন্ন অক্ষরের সংখ্যা = 7 এবং শব্দটি তৈরির জন্য নির্বাচিত অক্ষরের সংখ্যা = 4 অতএব মোট বিন্যাসের সংখ্যা হবে $^{7}p_4 = \frac{7!}{(7-4)!}$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} \quad \because (7-4)! = 3!$$

৯.৫ $^{n-1}p_3 : {}^{n+1}p_3 = 5 : 12$ হলে n–এর মান কত?

সমাধান ঃ

$$^{n-1}p_3 = \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} = \frac{(n-1)!}{(n-4)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3).$$

$$^{n+1}p_3 = \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)!}{(n-2)!}$$

$$= n\,(n-1)\,(n+1)$$

$$\therefore \; ^{n-1}p_3 : {}^{n+1}p_3 = \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{n(n-1)\,(n+1)} = \frac{(n-2)\,(n-3)}{n(n+1)}$$

শর্তানুসারে, $^{n-1}p_3 : {}^{n+1}p_3 = 5 : 12$

$\therefore \; \frac{(n-2)\,(n-3)}{n(n+1)} = \frac{5}{12}$

বা, $12\,(n-2)\,(n-3) = 5n\,(n+1)$

বা, $12\,(n^2 - 5n + 6) = 5n^2 + 5n$

বা, $7n^2 - 56n + 72 = 0$

বা, $(7n-9)\,(n-8) = 0$

$\therefore \; n = \frac{9}{7}$ অথবা $n = 8$ কিন্তু n একটি পূর্ণসংখ্যা,

তাই $n = 8$

৯.৬ 2,3,4,5,6 এবং 7 এই কটি অংকের সাহায্যে 5000–এর চেয়ে বড় চার অংকের কটি বিভিন্ন সংখ্যা তৈরি করা যায়? (একটি সংখ্যায় একটি অংক মাত্র একবারই ব্যবহার করা যাবে)

সমাধান ঃ যেহেতু সংখ্যাগুলি 5000–এর বড়, সেগুলি 5, 6 কিংবা 7 দিয়েই শুধু শুরু হতে পারে। 4 অংকের সংখ্যার প্রথম অংকটি এই তিনটি অংকের মধ্যে মোট $^3p_1 = 3$ উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

প্রথম অংক নির্বাচনের পর সংখ্যার অবশিষ্ট 3টি অংক 5টি অংক থেকে নেয়া যাবে $^5p_3$ উপায়ে। অতএব 5000–এর চেয়ে বড় 4 অংকের সংখ্যা তৈরির মোট উপায় হবে
$$3 \times {}^5p_3 = 3 \times \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 180$$

৯.৭ অংকশাস্ত্রের 4টি, অর্থনীতির 5টি এবং ব্যবস্থাপনার 4টি বইকে একটি তাকে পাশাপাশি কত বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যায়? (প্রতি বিষয়ের বইসমূহের নাম পরস্পর থেকে পৃথক)।

সমাধান ঃ অংকশাস্ত্র, অর্থনীতি ও ব্যবস্থাপনার বইগুলিকে এক একটি গ্রুপ হিসাবে ধরলে তাদের মোট $^3p_3 = 3!$ সংখ্যক বিন্যাস হতে পারে। অংকের বইগুলিকে নিজেদের মধ্যে 4! প্রকারে সাজানো যায়। অর্থনীতির বইগুলিকে নিজেদের মধ্যে 5! প্রকারে সাজানো যায় এবং ব্যবস্থাপনার বইগুলিকে নিজেদের মধ্যে 4! প্রকারে সাজানো যায়।

∴ গণনার মৌলিক নিয়ম অনুযায়ী মোট বিন্যাসের সংখ্যা হবে

$3! \times 4! \times 5! \times 4! = 414720$

৯.৮ *PERMUTATION, ARRANGEMENTS, NARAYANGANJ* শব্দের অক্ষরগুলিকে নিয়ে কত বিভিন্ন প্রকার শব্দ তৈরি করা যায়?

সমাধান ঃ PERMUTATION শব্দে মোট 11টি অক্ষর আছে। এগুলির মধ্যে T দুটি, অন্যগুলি সব একটি করে। ∴ মোট বিন্যাসের সংখ্যা অর্থাৎ সম্ভাব্য মোট শব্দের সংখ্যা $= \frac{11!}{2!} = 19,958,400$

ARRANGEMENTS শব্দে মোট 12টি অক্ষর। এগুলির মধ্যে A দুটি, R দুটি, N দুটি, E দুটি, অন্যগুলি সব একটি করে। অতএব মোট বিন্যাসের সংখ্যা $= \frac{12!}{2!\ 2!\ 2!\ 2!}$ $= 29,937,600$

NARAYANGANJ শব্দে 11টি অক্ষর। এগুলির মধ্যে N তিনটি, A চারটি, অন্যগুলি সব একটি করে। অতএব, মোট বিন্যাসের সংখ্যা হবে $\frac{11!}{3!\ 4!} = 277,200$

৯.৯ *ARRANGEMENTS* শব্দের অক্ষরগুলি দিয়ে যত বিভিন্ন প্রকার শব্দ তৈরি করা যায় তাদের কতগুলিতে (ক) স্বরবর্ণসমূহ বেজোড় অবস্থানে থাকবে? (খ) ব্যঞ্জনবর্ণসমূহ একত্রে থাকবে? (গ) দুটি N একত্রে থাকবে? (ঘ) দুটি N পাশাপাশি থাকবে না? (ঙ) দুটি R এবং দুটি A একত্রে থাকবে? (চ) প্রথম অক্ষর S হবে

সমাধান ঃ (ক) *ARRANGEMENTS* শব্দের অক্ষরসমূহের মোট বেজোড় অবস্থান 6টি। স্বরবর্ণ মোট চারটি (A, A, E, E), যাদের দুটি A দুটি E।

∴ 6টি অবস্থানে এই 4টি স্বরবর্ণ মোট $\frac{6p_4}{2!2!}$ প্রকারে বিন্যস্ত হতে পারে এবং $\frac{6p_4}{2!2!} = \frac{6!}{(6-4)!2!2!} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$ আবার অবশিষ্ট ৪টি বর্ণ নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হতে

পারে মোট $\frac{8!}{2!2!}$ উপায়ে (যেহেতু তাদের মধ্যে R এবং N দুটি করে) এবং $\frac{8!}{2!2!}$ = 10080। এতএব

(ক) প্রস্তাবের অনুরূপে মোট শব্দ তৈরি হতে পারে $90 \times 10080 = 907200$ টি।

(খ) ব্যঞ্জণ বর্ণসমূহকে একটি গ্রুপ (সব মিলিয়ে একটি বর্ণ) হিসেবে বিবেচনা করলে স্বরবর্ণসমূহ মোট বর্ণ হবে 5টি, যেখানে দুটি A এবং দুটি E এবং তাদের মোট বিন্যাস হবে $\frac{5!}{2!2!} = 30$টি। আবার ব্যঞ্জণবর্ণসমূহ নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হবে মোট $\frac{8!}{2!2!}$ = 10080 উপায়ে। অতএব ব্যঞ্জণবর্ণসমূহ একত্রে থাকবে এমন বিন্যাসের মোট সংখ্যা হবে

$30 \times 10080 = 302400$।

(গ) মোট 12টি অক্ষরের দুটি N একত্রে থাকলে তাদের একটি অক্ষর হিসেবে বিবেচনা করা যায়, সেক্ষেত্রে 11টি অক্ষরের মোট বিন্যাসের সংখ্যা হবে $\frac{11!}{2!2!2!}$ কেননা দুটি N–কে একটি ধরার পরও, A, E এবং R থাকে দুটি করে এবং

$$\frac{11!}{2!2!2!} = 4,989,600$$

(ঘ) দুটি N পাশাপাশি থাকবে না এমন শব্দের সংখ্যা হবে শব্দটির 12টি অক্ষর দ্বারা তৈরি সর্বমোট বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা থেকে দুটি N পাশাপাশি থাকবে এমন শব্দের সংখ্যার বিয়োগফল। প্রদত্ত শব্দটির 12টি অক্ষর দ্বারা তৈরি মোট শব্দের সংখ্যা = $\frac{12!}{2!2!2!2!}$ = 29,937,600

∴ দুটি N পাশাপাশি থাকবে না এমন শব্দের সংখ্যা হবে

$$29,937,600 - 4,989,600 = 25,948,000$$

(ঙ) দুটি A কে একটি এবং দুটি R কে একটি হিসেবে বিবেচনা করলে মোট অক্ষরের সংখ্যা 10 যেখানে দুটি N এবং দুটি E অতএব এই অংশটি অক্ষরের মোট বিন্যাসের সংখ্যা = $\frac{10!}{2!2!}$; কিন্তু এখনে A এবং R নিজেদের মধ্যে স্থান পরিবর্তন করতে পারে 2! উপায়ে, অতএব দুটি A এবং দুটি R পাশাপাশি থাকবে এমন শব্দের মোট সংখ্যা হবে

$$2! \times \frac{10!}{2!2!} = \frac{10!}{2!} = 1,814,400$$

(চ) S-কে প্রথম স্থানে স্থির করে রাখলে অবশিষ্ট 11 টি অক্ষরের মোট বিন্যাসের সংখ্যা হবে $\frac{11!}{2!2!2!2}$ = 2,494,800

৯.১০ (ক) 1 থেকে 9 পর্যন্ত নয়টি অংক ব্যবহার করে দশ হাজারের বড় কিন্তু এক লক্ষের ছোট ক'টি সংখ্যা পাওয়া যাবে? প্রতি সংখ্যায় একটি অংক একবারই ব্যবহার করা যাবে। (খ) এগুলির মধ্যে জোড় সংখ্যা কতটি? (গ) সংখ্যাগুলির কতটি 42000 থেকে বড়?

সমাধান : (ক) মোট অংক 9টি, দশ হাজারের চেয়ে বড় কিন্তু একলক্ষের চেয়ে ছোট সংখ্যার প্রতিটিতে অংক থাকে 5টি 9টি অংক থেকে 5টি অংক নিয়ে মোট বিভিন্ন সংখ্যা তৈরি করা যায় $^9P_5$ টি এবং

$$^9P_5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 15120$$

(খ) জোড় সংখ্যাগুলির শেষ অংক 2, 4, 6 কিংবা 8 হবে। এখন শেষ অংক 2, 5 অংকের এমন মোট সংখ্যা হবে $^{9-1}P_{5-1} = {}^8P_4$ একইভাবে শেষ অংক 4, 6 কিংবা 8 এদের প্রত্যেক ক্ষেত্রে সংখ্যা পাওয়া যায় $^8P_4$ টি, অতএব 9টি অংক থেকে 5 অংক নিয়ে তৈরি মোট জোড় সংখ্যা $4 \times {}^8P_4 = 4 \times \frac{8!}{(8-4)!} = 6720$ টি।

(গ) সংখ্যাগুলি যদি 42000 এর চেয়ে বড় হয় তবে প্রথম অংকটি 1, 2 কিংবা 3 হবে না এবং প্রথম অংক 1, 2 কিংবা 3 এমন 5 অংকের সংখ্যা হবে মোট $3 \times {}^8P_4$। এছাড়া প্রথম অংকটি 4 হলেও দ্বিতীয় অংকটি 1 হতে পারবে না। আর প্রথম দুটি অংক 4 এবং 1 হবে এমন 5 অংকের সংখ্যা পাওয়া যাবে $^7P_3$। অর্থাৎ 42000 এর ছোট মোট সংখ্যা পাওয়া যাবে

$$3 \times {}^8P_4 + {}^7P_3 = 5250 \text{।}$$

কিন্তু 5 অংকের মোট সংখ্যা = $^9P_5$ = 15120 টি। অতএব 42000-এর চেয়ে বড় মোট সংখ্যা পাওয়া যাবে

$$15120 - 5250 = 9870 \text{ টি।}$$

৯.১১ 6 জন ছেলে এবং 4 জন মেয়েকে যদি একসারিতে এমনভাবে দাঁড় করানো যায় যে দুজন মেয়ে কখনোই পাশাপাশি থাকবে না তবে তাদেরকে কত বিভিন্নভাবে দাঁড় করানো যাবে?

সমাধান ঃ যেহেতু দুজন মেয়ে পাশাপাশি থাকবে না, মেয়েরা দুজন ছেলের মাঝখানে দাঁড়াবে অথবা দুজন মেয়ে একেবারে দুই প্রান্তে দাঁড়াবে এবং বাঁকি দুজন মেয়ে কোন দুজোড়া ছেলের মাঝখানে দাঁড়াবে। 6 জন ছেলেকে প্রথমে দাঁড় করিয়ে দিলে 6 জন ছেলের মাঝখানে 5টি এবং দুই প্রান্তের দুইটি অর্থাৎ মোট 7টি জায়গায় 4 জন মেয়ে মোট $^7P_4$ উপায়ে দাঁড়াতে পারে। আবার ছেলেরা পরস্পারের তুলনায় স্থান পরিবর্তন করে মোট 6! উপায়ে দাঁড়াতে পারে। অতএব ছেলে ও মেয়েদের প্রস্তাবিত অবস্থায় বিন্যাসের মোট সংখ্যা হবে

$$^7P_4 \times 6! = 604,800$$

সমাবেশ

ইতিপূর্বে সমবেশের সংজ্ঞা এবং বিন্যাস থেকে সমাবেশের পার্থক্য বর্ণিত হয়েছে। এখন সমাবেশ সংক্রান্ত সূত্র ও বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের উদাহরণ দেয়া হবে।

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু নিয়ে যতটি গ্রুপ হতে পারে অর্থাৎ n সংখ্যক বস্তু থেকে একবারে r সংখ্যক বস্তু নিলে তাদের সমাবেশের সংখ্যা $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ যেখানে $r \leq n$

সমাবেশ সংক্রান্ত কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ মান

১. $^nc_0 = 1$

$$\left[{^nc_0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1.n!} = 1 \right]$$

২. $^nc_1 = n$

$$\left[{^nc_1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n \right]$$

৩. $^nc_n = 1$

$$\left[{^nc_n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!.1} = 1 \right]$$

৪. $^nc_n = {}^nc_{n-1}$

$\Big[{}^nc_n = n\ ;\ {}^nc_{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!\{n-(n-1)\}!} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!}$

$= \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

$\therefore\ {}^nc_n = {}^nc_{n-1} \Big]$

৫. $^nc_r = {}^nc_{n-r}$

$\Big[{}^nc_r = \dfrac{n!}{r(n-r)!}\ ;\ {}^nc_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

$= \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$\therefore\ {}^nc_r = {}^nc_{r-1} \Big]$

৬. $^nc_r = \dfrac{n}{r} \times {}^{n-1}c_{r-1}$

$\Big[r \times {}^nc_r = r \times \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{r \times n!}{r(r-1)!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$n \times {}^{n-1}c_{r-1} = n \times \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\ \{n-1-(r-1)\}!} = \dfrac{n(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$= \dfrac{n!}{(r-1)!\ (n-1)!}$

$\therefore\ r \times {}^nc_r = n \times {}^{n-1}c_{r-1}$

$\Rightarrow {}^nc_r = \dfrac{n}{r} \times {}^{n-1}\ c_{r-1} \Big]$

৭. $^{n+1}c_r = {}^nc_r + {}^nc_{r-1}$

$\Big[{}^nc_r = \dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$

$$^{n}c_{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\therefore \quad ^{n}c_{r} + {}^{n}c_{r-1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \times \frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{r(r-1)!\,(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$$

$$= {}^{n+1}c_{r}$$

সীমাবদ্ধ সমাবেশ

n সংখ্যক বস্তুর থেকে r সংখ্যক বস্তুর সমাবেশের সংখ্যা নির্ণয়ের সময় এমন শর্ত দেয়া থাকতে পারে যে কয়েকটি (p সংখ্যক) নির্দিষ্ট বস্তু কখনই সমাবেশে থাকবে না। সেক্ষেত্রে মোট সমাবেশের সংখ্যা হবে $^{n-p}c_{r}$, আবার যদি এমন হয় যে q সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই সমাবেশে থাকবে তাহলে মোট সমাবেশের সংখ্যা হবে $^{n-q}c_{r-q}$। উভয় ক্ষেত্রেই নির্ধারিত শর্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ বলে সমাবেশকে **সীমাবদ্ধ সমাবেশ** (Restricted conbination) বলা হয়।

৯.১২ বাণিজ্যিক গণিতের পরীক্ষায় একজন ছাত্রকে 6টি প্রশ্নের মধ্যে যেকোন 4টির উত্তর দিতে বলা হলে ছাত্রটি কত বিভিন্ন উপায়ে 4টি প্রশ্নের উত্তর দিতে পারবে?

সমাধান ঃ 6টি প্রশ্নের মধ্যে 4টি প্রশ্নের সমাহার তৈরি করতে হলে ছাত্রটির জন্য বিভিন্ন রকম পছন্দের সমাবেশ হতে পারে $^6c_4$ সংখ্যক। এবং

$$^6c_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!\ 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

৯.১৩ কোন বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের একটি বিভাগে মাস্টারস চূড়ান্ত পর্বের সমাপনী পরীক্ষার পর ছাত্রছাত্রীদের ব্যবহারিক শিক্ষার জন্য 10 জন ছাত্রছাত্রীর একেকটি গ্রুপ তৈরি করা হল। কোন একটি গ্রুপের 6 জন ছাত্র এবং 4 জন ছাত্রীর মধ্যে 5 জনকে শিল্প ব্যাংকে পাঠানোর সিদ্ধান্ত নিলে কত বিভিন্ন উপায়ে এই 5 জনের এমন উপগ্রুপ তৈরি করা যাবে যেখানে অবশ্যই ঠিক দুজন ছাত্রী থাকবে?

সমাধান ঃ 5 জনের উপ গ্রুপে যেহেতু 2 জন ছাত্রী থাকবে, ছাত্র থাকবে মোট 3 জন। 6 জন ছাত্র থেকে 3 জন ছাত্র নেয়া যাবে $^6c_3$ উপায়ে, আবার 4 জন ছাত্রী থেকে 2 জন ছাত্রী নেয়া যবে $^4c_2$ উপায়ে। অতএব 3 জন ছাত্র এবং 2 জন ছাত্রী নিয়ে 5 জনের উপ গ্রুপ তৈরি করা যাবে মোট $^6c_3 \times {}^4c_2$ উপায়ে এবং

$$^6c_3 \times {}^4c_2 = \frac{6!}{3!\ (6-3)!} \times \frac{4!}{2!\ (4-2)!} = 120$$

৯.১৪ ধরা যাক কোন বিশ্ববিদ্যালয়ের বাণিজ্য অনুষদের প্রথম বর্ষ সম্মান শ্রেণীতে ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে 4টি বিভিন্ন গ্রুপ থেকে উত্তর করার জন্য শর্ত দেয়া আছে। প্রতি গ্রুপে 5টি করে প্রশ্ন থাকলে এবং প্রত্যেক গ্রুপ থেকে অন্তত দুটি করে সর্বমোট 10টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হলে একজন পরীক্ষার্থী কত বিভিন্ন উপায়ে 10টি প্রশ্নের উত্তর দিতে পারবে?

সমাধান ঃ পরীক্ষার্থীর জন্য প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ গ্রুপ থেকে বিভিন্ন সংখ্যক প্রশ্ন নেয়ার সমাবেশ সমূহ হবে

১. $2 + 2 + 2 + 4 = 10 \rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_2 \times {}^5c_2 \times {}^5c_2 \times {}^5c_4 = 5000$

২. $2 + 2 + 4 + 2 = 10 \rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_2 \times {}^5c_2 \times {}^5c_4 \times {}^5c_2 = 5000$

৩. $2 + 4 + 2 + 2 = 10 \Rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_2 \times {}^5c_4 \times {}^5c_2 \times {}^5c_2 = 5000$

৪. $4 + 2 + 2 + 2 = 10 \rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_4 \times {}^5c_2 \times {}^5c_2 \times {}^5c_2 = 5000$

৫. $3 + 3 + 2 + 2 = 10 \Rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_3 \times {}^5c_3 \times {}^5c_2 \times {}^5c_2 = 10,000$

৬. $3 + 2 + 3 + 2 = 10 \Rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_3 \times {}^5c_2 \times {}^5c_3 \times {}^5c_2 = 10,000$

৭. $2 + 2 + 3 + 3 = 10 \Rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_2 \times {}^5c_2 \times {}^5c_3 \times {}^5c_3 = 10,000$

৮. $2 + 3 + 2 + 3 = 10 \Rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_2 \times {}^5c_3 \times {}^5c_2 \times {}^5c_3 = 10,000$

৯. $2 + 3 + 3 + 2 = 10 \Rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_2 \times {}^5c_3 \times {}^5c_3 \times {}^5c_2 = 10,000$

১০. $3 + 2 + 2 + 3 = 10 \Rightarrow$ সমাবেশের সংখ্যা $= {}^5c_3 \times {}^5c_2 \times {}^5c_2 \times {}^5c_3 = 10,000$

অতএব 10টি প্রশ্ন বাছাই–এর বিভিন্ন প্রকার উপায়ের মোট সংখ্যা $= 5000 \times 4 + 10000 \times 6 = 80,000$

৯.১৫ LOGARITHMS শব্দের স্বরবর্ণ ও ব্যঞ্জণবর্ণসমূহ থেকে 2টি স্বরবর্ণ এবং 3টি ব্যঞ্জণবর্ণ নিয়ে 5 অক্ষরের মোট কতটি বিভিন্ন প্রকার শব্দ তৈরি করা যায়?

সমাধান ঃ শব্দটিতে স্বরবর্ণ মোট 3টি, ব্যঞ্জনবর্ণ 7টি। 3টি স্বরবর্ণের 2টি নেয়া যাবে মোট ${}^3c_2$ উপায়ে, 7টি ব্যঞ্জনবর্ণের 3টি নেয়া যাবে মোট ${}^7c_3$ উপায়ে। অর্থাৎ 5টি অক্ষর নির্বাচনের মোট উপায় $= {}^3c_2 \times {}^7c_3$। কিন্তু এই পাঁচটি অক্ষর নিজেদের মধ্যে সাজানো যাবে মোট 5! উপায়ে। অতএব, মোট শব্দ তৈরি করা যাবে ${}^3c_2 \times {}^7c_3 \times 5!$

$$= 3 \times 35 \times 120 = 12600$$

৯.১৬ একটি ফুটবল ক্লাবে মোট 20 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 7 জন ফরোয়ার্ড এবং 2 জন গোলরক্ষক। ঠিক 4 জন ফরোয়ার্ড এবং 1 জন গোলরক্ষক সহ 11 জনের একটি টিম কত বিভিন্ন প্রকার উপায়ে গঠন করা যাবে?

সমাধান ঃ 7 জন ফরোয়ার্ডের মধ্যে 4 জনকে নির্বাচন করা যাবে ${}^7c_3$ উপায়ে এবং 2 জন গোলরক্ষকের 1 জনকে নির্বাচন করা যাবে ${}^2c_1$ উপায়ে। ফরোয়ার্ড এবং গোলরক্ষক ছাড়া টিমের জন্য আরও 6 জনকে নির্বাচন করতে হবে অবশিষ্ট $\{20 - (7 + 2)\} = 11$ জনের থেকে। তা করা যাবে ${}^{11}c_6$ উপায়ে। অতএব সর্বমোট বিভিন্ন উপায়ে সংখ্যা হবে ${}^7c_4 \times {}^2c_1 \times {}^{11}c_4 = 558, 835, 200$

৯.১৭ একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের কোন একটি বিভাগে মোট শিক্ষকের সংখ্যা 20। পরীক্ষার সেশনে প্রতিদিন পরীক্ষার হলে 10 জন উপস্থিত থাকার সিদ্ধান্ত নেয়া হলে নির্দিষ্ট দু'জন শিক্ষক সর্বোচ্চ মোট কত বিভিন্ন উপায়ে অন্যান্য শিক্ষকের সঙ্গে উপস্থিত থাকতে পারেন?

সমাধান ঃ নির্দিষ্ট দু'জন শিক্ষক সর্বদা উপস্থিত থাকলে 10 জনের অবশিষ্ট 4 জন মোট (20 - 2) অর্থাৎ 18 জনের থেকে নির্বাচিত হবেন। অতএব নির্দিষ্ট দুজন অন্যান্যদের সঙ্গে সর্বদা একত্রে উপস্থিত থাকতে পারেন মোট $^{18}c_8 = 1,761,322,560$ উপায়ে।

৯.১৮ MATHEMATICS শব্দটির 4 টি অক্ষর নিয়ে কতটি বিভিন্ন প্রকার শব্দ তৈরি করা যায়? (প্রদত্ত শব্দে কোন অক্ষর যতবার আছে, প্রাপ্ত শব্দগুলিতে সে অক্ষর সর্বোচ্চ ততবারই থাকতে পারবে)।

সমাধান ঃ শব্দটিতে 2টি M, 2টি T এবং বাকি অক্ষরগুলি প্রত্যেকেই আলাদা আলাদা, শর্তানুযায়ী 4 অক্ষরের নিম্নোক্ত সমাবেশসমূহে গঠিত হতে পারে ঃ

ক. 4টি অক্ষরই আলাদা আলাদা

খ. একই অক্ষর 2টি, অপর দুটি আলাদা আলাদা

গ. একই অক্ষর দুটি, ভিন্ন একটি অক্ষর দুটি

ক. সমাবেশে মোট ভিন্ন ভিন্ন 8টি অক্ষর থেকে 4টি নেয়া যায় $^8c_4$ উপায়ে

খ. সমাবেশ 2টি করে তিনটি অক্ষরের যেকোন একই অক্ষরের দুটি নেয়া যাবে $^3c_1$ এবং বাকি 7টি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর থেকে বাকি দুটি নেয়া যাবে $^7c_2$ উপায়ে অর্থাৎ খ) অবস্থায় মোট উপায় হবে $^3c_1 \times {}^7c_1$

গ. সমাবেশে তিনটি জুটির মধ্যে 2টি জুটি নেয়া যাবে $^3c_2$ উপায়ে আবার,

ক. সমাবেশে নেয়া 4টি অক্ষর নিজেদের মধ্যে 4! উপায়ে সাজানো যায়, অতএব ক. সমাবেশে প্রাপ্ত মোট শব্দের সংখ্যা $= {}^8c_4 \times 4!$

খ. সমাবেশে নেয়া 4টি অক্ষর নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{2!}$ উপায়ে সাজানো যায়, অতএব খ. সমাবেশে প্রাপ্ত মোট শব্দের সংখ্যা $= {}^3c_1 \times {}^7c_2 \times \frac{4!}{2!}$

গ. সমাবেশে নেয়া 4টি অক্ষর নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{2!\,2!}$ উপায়ে সাজানো যায়, অতএব গ. সমাবেশে মোট শব্দের সংখ্যা $= {}^3c_2 \times \frac{4!}{2!\,2!}$ অতএব মোট শব্দের

সংখ্যা $= {}^8c_2 \times 4! + {}^3c_1 \times {}^7c_2 \times \frac{4!}{2!} + {}^3c_2 \times \frac{4!}{2!\,2!}$

$= 1680 + 756 + 18$

$= 2454$

অনুশীলনী - ৯

১. বিন্যাস কাকে বলে? উদাহরণসহ বুঝাও।

২. সমাবেশের সংজ্ঞা দাও এবং উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

৩. বিন্যাস ও সমাবেশের মধ্যে পার্থক্য কি?

৪. যৌগিক কি? বিন্যাস ও সমাবেশের সংখ্যা নির্ণয়ে যৌগিকের ব্যবহার দেখাও।

৫. গণনার দুটি মৌলিক নিয়ম ব্যাখ্যা কর।

৬. ঢাকা বা চট্টগ্রামের মতো বড় শহরে টেলিফোনের নম্বর ছয় অংকের কেন হয় তার যুক্তি দাও।

৭. বৃত্তাকার বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য বুঝাও।

৮. সীমাবদ্ধ বিন্যাস এবং সীমাবদ্ধ সমাবেশ সম্পর্কে ধারণা দুটি ব্যাখ্যা কর।

৯. একটি সংস্থার সভায় সভা-পরিচালনা মঞ্চে পাঁচটি আসন। সংস্থার সভাপতি ও সাধারণ সম্পাদককে মঞ্চের আসনসমূহে কত বিভিন্ন প্রকারে বসানো যায়?

১০. প্রমাণ কর যে, ক. $20! = 2^{10}.10!(1.\ 3.\ 5.\ \ldots\ldots\ 15.\ 17.\ 19)$

খ. ${}^np_r = n \times {}^{n-1}p_{r-1}$

১১. ক. ${}^np_3 = 12.{}^np_1$ হলে n–এর মান কত?

খ. ${}^{n+3}p_6 : {}^{n+2}p_4 = 14 : 1$ দেয়া থাকলে n–এর মান কত?

১২. দৌড় প্রতিযোগিতায় 7 জন অংশ নিয়ে একজন প্রথম এবং একজন সর্বশেষ স্থান পেল। প্রথম ও সর্বশেষ স্থান অধিকারী দুজন কখনই পাশাপাশি থাকবে না এই শর্তে 7 জনকে একটি সারিতে কত বিভিন্ন উপায়ে বসানো যাবে?

১৩. 4 জন ছেলে এবং 4 জন মেয়েকে একটি সারিতে এমনভাবে বসাতে হবে যাতে মেয়েরা সর্বদা পাশাপাশি থাকে। তাদেরকে কত বিভিন্নভাবে বসানো যাবে?

১৪. 5 জন লোক কত বিভিন্ন উপায়ে 7 টি শূন্য চেয়ারে বসতে পারে?

১৫. 0, 1, 2, 3, 4 এবং 5 দ্বারা পাঁচ অংকের কতটি সংখ্যা তৈরি করা যায়?

১৬. TUESDAY শব্দের বিভিন্ন অক্ষর দিয়ে মোট কতটি শব্দ তৈরি করা যায়? এদের কতগুলি T দ্বারা শুরু হবে এবং Y দ্বারা শেষ হবে?

১৭. TRIANGLE শব্দের অক্ষরসমূহ থেকে কত বিভিন্ন উপায়ে দুঅক্ষরের এমন জুটি বেছে নেয়া যাবে যাতে একটি স্বরবর্ণ এবং একটি ব্যঞ্জনবর্ণ থাকবে?

১৮. LOGARITHM শব্দের অক্ষরসমূহ দিয়ে এমন কতটি বিভিন্ন প্রকার শব্দ তৈরি করা যাবে যেগুলিতে (ক) ব্যঞ্জনবর্ণসমূহ কখনই একত্রে থাকবে না? (খ) স্বরবর্ণসমূহ কখনই একত্রে থাকবে না? (গ) স্বরবর্ণসমূহ শুধু বেজোড় অবস্থানে থাকবে? (ঘ) স্বরবর্ণসমূহ দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ স্থানে থাকবে? (ঙ) দুটি স্বরবর্ণ পাশাপাশি থাকবে না?

১৯. (ক) BUSINESS এবং (খ) INDEPENDENCE শব্দ দুটির অক্ষরগুলি দিয়ে কতটি আলাদা আলাদা শব্দ তৈরি করা যায়?

২০. 6 জন ছেলে কত বিভিন্ন উপায়ে গোল টেবিল ঘিরে বসতে পারে?

২১. বিশ্ববিদ্যালয়ের 6 জন ছাত্র এবং কলেজের 5 জন ছাত্র কোন গোল টেবিলে যদি এমনভাবে বসে যে বিশ্ববিদ্যালয়ের দুজন ছাত্র কখনই পাশাপাশি বসবে না তবে তারা কত বিভিন্নভাবে বসতে পারে?

২২. 9টি চিঠি 4 টি ডাকবাক্সে কত বিভিন্নভাবে ফেলা যায়?

২৩. একটি ছাত্রের বই-এর তাকে অংকের 2টি, ফিন্যান্সের 5টি, অর্থনীতির 3টি এবং ব্যাংকিং, হিসাব বিজ্ঞান ও পরিসংখ্যানের প্রতিটির একটি করে বই আছে। বইগুলি কত বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যাবে? (অংক, ফিন্যান্স এবং অর্থনীতির প্রতিটি বই-এর সংখ্যা একাধিক হলেও প্রতি বিষয়ের বইগুলি একই নামের)

২৪. ${}^{n}c_4 : {}^{n}c_3 = 3 : 4$ হলে n-এর মান কত?

২৫. ${}^{n}c_4 = {}^{n}c_7$ হলে ${}^{2n}c_{21}$-এর মত কত?

২৬. একটি প্রশ্নপত্রের 6টি প্রশ্নের 3টি ক-গ্রুপে এবং 3টি খ-গ্রুপে দেয়া আছে। প্রতি গ্রুপে অন্তত একটি নিয়ে মোট 4টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হলে উত্তর দেয়ার জন্য মোট কত প্রকার উপায়ে প্রশ্ন বাছাই করা যাবে?

২৭. একটি ক্রিকেট ক্লাবে 15 জন খেলোয়াড়ের 5 জন বল করে এবং 2 জন উইকেট রক্ষক। একজন মাত্র উইকেট রক্ষক এবং অন্তত 3 জন বোলারসহ 11 জনের একটি টিম কত বিভিন্ন প্রকার উপায়ে তৈরি করা যাবে?

২৮. 6 জন পুরুষ এবং 5 মহিলার মধ্য থেকে 4 জনকে নিয়ে একটি কমিটি গঠন করতে হবে। অন্তত 2 জন মহিলা থাকবেন 4 জনের এরকম কমিটি কত বিভিন্ন প্রকার উপায়ে গঠন করা যায়?

২৯. একটি প্রশ্নপত্রে দুটি গ্রুপের প্রথমটিতে 4টি এবং অপরটিতে 5টি মিলে মোট 9টি প্রশ্ন আছে। প্রথম গ্রুপ থেকে দুটি এবং মাত্র দুটি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। দ্বিতীয় গ্রুপ থেকে কটি উত্তর দিতে হবে এমন কিছু বলা নাই। উত্তর দেয়ার জন্য প্রশ্নের কত বিভিন্ন প্রকার সমাবেশ হতে পারে?

৩০. 6টি প্রশ্নের যদি প্রথম ও দ্বিতীয় প্রশ্নের উত্তর বাধ্যতামূলক হয় তবে কত প্রকারে মোট 4টি প্রশ্নের উত্তর করা যায়?

৩১. 25টি বিভিন্ন বইয়ের মধ্যে 7টি অংকের, 6টি অর্থনীতির, 7টি ফিন্যান্সের, 5টি পরিসংখ্যানের। প্রতি বিষয়ের তিনটি করে মোট 12টি বই কত বিভিন্ন প্রকার উপায়ে বাছাই করা যায়?

৩২. একটি গ্রুপে 5 জন শিক্ষক ও 25 জন ছাত্র আছে। এদের মধ্যে 2 জন শিক্ষক এবং 9 জন ছাত্রকে নিয়ে কত বিভিন্ন উপায়ে 11 জনের গ্রুপ তৈরি করা যায়? একজন নির্দিষ্ট শিক্ষক সর্বদাই গ্রুপে অন্তর্ভুক্ত হলে কত বিভিন্ন উপায়ে তেমন গ্রুপ তৈরি করা যাবে? একজন নির্দিষ্ট শিক্ষক কখনই গ্রুপে না থাকলে কত বিভিন্ন উপায়ে তা তৈরি করা যাবে? গ্রুপে 3 জন নির্দিষ্ট ছাত্র কখনই না থাকলে কত বিভিন্নভাবে তা তৈরি করা যাবে?

৩৩. একটি পরিবারে বাবা, মা, 4 জন ছেলে এবং 3 জন মেয়ে মিলে মোট সদস্য সংখ্যা 9. একটি বিয়েতে এই পরিবার থেকে তিনজনকে নিমন্ত্রণ করলে তারা কত বিভিন্ন উপায়ে যেতে পারে যদি (ক) বাবা অবশ্যই যান (খ) বাবা যান তবে মা না যান (গ) বাবা ও মা দুজনই যান (ঘ) একজন ছেলে ও একজন মেয়ে যান (ঙ) মা এবং অন্তত একজন মেয়ে যান (চ) ছেলেদের শুধু একজন যান (ছ) ছেলেদের কেউ না যান।

দশম অধ্যায়

দ্বিপদী উপপাদ্য

[BINOMIAL THEOREM]

কোন গাণিতিক বিবৃতিতে (Expression) দুটি পদ থাকলে তাকে দ্বিপদী বিবৃতি (Bionomial expression) বলা হয়। $(p + q)$, $(2m + n)$ $(100x + y)^5$ ইত্যাদির প্রত্যেকেই একেকটি দ্বিপদী বিবৃতি।

দ্বিপদী বিবৃতিসমূহ সম্পর্কে বিশেষ উপপাদ্যের সৃষ্টি এবং তার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বিভিন্ন বিষয় নিয়ে চর্চার গুরুত্ব সমধিক। একটি উদাহরণে লক্ষ্য কর ঃ বার্ষিক শতকরা 5 টাকা চক্রবৃদ্ধি হারে 10000 টাকার 7 বছরের মোট সুদের পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে। চক্রবৃদ্ধি সুদকষার নিয়মানুযায়ী 10000 টাকা সুদ আসলে দাঁড়াবে $10000\,(1 + .05)^7$ টাকায়। এই পরিমাণ থেকে আসল 10000 টাকা বিয়োগ করলেই মোট সুদের পরিমাণ পাওয়া যাবে। কিন্তু প্রশ্ন হচ্ছে $(1 - .05)^7$ এর মান কত হবে? তা যদি $(1 + .05)$ কে পরপর সাত বার গুণ করে নির্ণয় করতে হয় তবে তা হবে শ্রমসাধ্য এবং বিরক্তিকর। তাতে ভুলের সম্ভাবনা বেশী। কিন্তু $(x + y)^n$ এর জন্য যদি কোন সূত্র জানা থাকে তবে সে সূত্রে $x = 1$, $y = .05$ এবং $n = 7$ বসিয়ে অধিকতর নির্ভরযোগ্যতার সাথে এবং সহজে $(1 + .05)^7$-এর মান নির্ণয় করা যায়। কিংবা ধরা যাক, $\sqrt[5]{250}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে। সংবর্গমান ছাড়াও দ্বিপদী উপপাদ্যের মাধ্যমে এই মান পাওয়া যেতে পারে। সেক্ষেত্রে প্রাথমিকভাবে $\sqrt[5]{250}$ কে $(243 + 7)^{\frac{1}{5}}$ লিখে $(x + y)^n$ এর সূত্রে $x = 243$, $y = 7$ এবং $n = \frac{1}{5}$ বসিয়ে কাজটি সম্পাদন করলে $\sqrt[5]{250}$ এর মান যথেষ্ট নির্ভরযোগ্যতার সঙ্গে নির্ধারণ করা যায়।

দ্বিপদী বিবৃতির বিস্তৃতি ঃ

দ্বিপদী উপপাদ্যকে সাধারণভাবে নিম্নলিখিত উপায়ে বিবৃত করা হয় ঃ

$(x + a)$ একটি দ্বিপদী বিবৃতি হলে

$$(x + a)^n = {}^nc_0\, x^n a^0 + {}^nc_1 x^{n-1} a^1 + {}^nc_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + {}^nc_r x^{n-r} a^r + \ldots + {}^nc_n x^{n-n} a^n$$

$= x^n + {}^nc_1 x^{n-1}a + {}^nc_2 x^{n-2}a^2 + \ldots + {}^nc_r x^{n-r}a^r + \ldots + {}^nc_{n-1} xa^{n-1} + a^n$

প্রদত্ত সূত্রে সমান চিহ্নের ডান দিকের অংশকে দ্বিপদী বিবৃতির বিস্তৃতি (Expansion) বলা হয়।

দ্বিপদী সহগসমূহের বৈশিষ্ট্য ঃ

লক্ষণীয় যে বিস্তৃতির প্রথম পদের x–এর সূচক (power) n, দ্বিতীয় পদের x–এর সূচক $n - 1$, তৃতীয় পদের $(n - 2)$ ইত্যাদি এবং এভাবে শেষ পদের x–এর সূচক শূন্য। এছাড়া প্রথম পদের x^n–এর সহগ ${}^nc_0\, a^0$, দ্বিতীয় পদের x^{n-1} এর সহগ ${}^nc_1\, a^1$, তৃতীয় পদের x^{n-2} এর সহগ ${}^nc_2 a^{n-2}$ ইত্যাদি। দ্বিপদী উপপাদ্যে সূচক ও সহগসমূহের আরও কয়েকটি বৈশিষ্ট্য আছে। এই বৈশিষ্ট্যসমূহকে সাজিয়ে লিখলে সেগুলি মোটামুটি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় ঃ

(ক) দ্বিপদী বিবৃতির সূচক যত হবে তার বিস্তৃতিতে মোট পদের সংখ্যা হবে তার চেয়ে এক বেশি। যেমন,

$(x + a)^5 = x^5 + {}^5c_1 x^{5-1}a^1 + {}^5c_2 x^{5-2}a^2 + {}^5c_3 x^{5-3}a^3 + {}^5c_4 x^{5-4}a^4 + {}^5c_5 x^{5-5}a^5$

$= x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$

এখানে $(x + a)^5$–এর বিবৃতির সূচক 5 এর বিস্তৃতির সংখ্যা 6।

মধ্যবর্তী পদের সংখ্যা দুটি হলে এই পদদ্বয়ের সংখ্যাগত সহগ সমান (উপরের উদাহরণে মধ্যবর্তী) দুটি পদ $10x^3a^2$ এবং $10x^2a^3$–এর সংখ্যাগত সহগ 10 এবং মধ্যবর্তী পদদ্বয় থেকে উভয় পাশে সমান দূরে অবস্থিত পদসমূহের সংখ্যাগত সহগ জুটিও পরস্পরের সমান। মধ্যবর্তী পদ একটি হলে (বিবৃতির সূচক জোড় হলে বিস্তৃতির পদসংখ্যা বেজোড় হবে এবং সেক্ষেত্রে মধ্যবর্তী পদ একটি হবে) মধ্যবর্তী পদ থেকে উভয় দিকে সমান দূরে অবস্থিত পদ জুটির সংখ্যাগত সহগও পারস্পরিক সমান।

(গ) বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদের সহগ সমান।

(ঘ) বিস্তৃতির পদসমূহের দুটি উপাদানের সূচকের যোগফল সর্বদাই সমান এবং তা দ্বিপদী বিবৃতির সূচকের সমান। $(x + a)^5$-এর বিস্তৃতিতে সব পদেরই x এবং a-এর সূচকের যোগফল 5।

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ বিবৃতি থেকে কয়েকটি ব্যবহারিক সূত্র তৈরি করে নেয়া যায়। তার উদাহরণ

ক) $(x - a)^n = \{x + (-a)\}^n = x^n + {}^nc_1 x^{n-1}(-a)^1 + {}^nc_2 x^{n-2}(-a)^2 + \ldots + {}^nc_n(-a)^n$

$= x^n - {}^nc_1 x^{n-1} a + {}^nc_2 x^{n-2} a^2 - {}^nc_3 x^{n-3} a^3 + \ldots\ldots + (-1)^n a^n$

খ) $(1 + x)^n = 1 + {}^nc_1 x + {}^nc_2 x^2 + \ldots\ldots + x^n$ ইত্যাদি।

দ্বিপদী বিবৃতির সূচক ভগ্নাংশ কিংবা ঋণাত্মক হলে, যেমন $(x - a)^{\frac{1}{2}}$ বা $(x + a)^{-3}$ ইত্যাদি ক্ষেত্রে দ্বিপদী বিবৃতির বিস্তৃতি হবে অসীম এবং তাদের জন্য সাধারণ সূত্র ব্যবহারের পূর্বে বিবৃতিকে এমনভাবে সাজাতে হবে যেন তার প্রথম পদটি হয় এক (1)। অর্থাৎ n কোন ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক মান হলে $(x + a)^n$ কে $\left\{ x \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right\}^n$ $= x^n \left(1 + \frac{a}{x} \right)^n$ হিসবে লিখে $\left(1 + \frac{a}{x} \right)^n$ এর জন্য $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির সূত্র প্রয়োগ করতে হবে। যথাস্থানে এসবের উদাহরণ দেখানো হবে।

দ্বিতীয় বিবৃতির সাধারণ পদ, পদসমূহের সহগ ও মধ্যপদ ঃ

এখানে দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ পদ, পদসমূহের সহগ, মধ্যপদ ইত্যাদি সম্পর্কিত বিষয়াদির অপেক্ষাকৃত বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

$(x + a)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম পদ $= {}^nc_0 x^{n-0} a^0 = x^n$

দ্বিতীয় পদ $= {}^nc_1 x^{n-1} a^1$

তৃতীয় পদ $= {}^nc_2 x^{n-2} a^2$ এবং এভাবে

t_{r+1} [সাধারণ, অর্থাৎ $(r + 1)$ তম পদ] $= {}^nc_r x^{n-r} a^r$

বা, অন্যভাবে $t_{r+1} = {}^nc_r x^{n-r} a^r$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n - r + 1)}{r!} x^{n-r} a^r$$

সাধারণ পদ সংক্রান্ত এই সূত্রটি ব্যবহার করে দ্বিপদী বিবৃতির মধ্য পদ নির্ণয় সহজ করা যায়

যেমন, $(x + a)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদের সংখ্যা $(n + 1)$। এখন n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে সহজেই অনুমেয় যে বিস্তৃতির মোট সংখ্যা বেজোড় হবে এবং মধ্যপদ হবে একটি। আর এই মধ্যপদটি হবে $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ। কিন্তু n যদি বেজোড় হয় তবে মোট পদের সংখ্যা হবে জোড় এবং সেক্ষেত্রে মধ্যপদ থাকবে দুটি, যাদের প্রথমটি হবে $\left(\frac{n + 1}{2}\right)$ তম এবং দ্বিতীয়টি হবে $\left(\frac{n + 1}{2} + 1\right)$ তম। এরপর বিস্তৃতির

$(r + 1)$–তম পদের জন্য সূত্র ব্যবহার করে মধ্যপদসমূহ নির্ণয় করা কোন কঠিন কাজ নয়।

কোন দ্বিপদী বিবৃতিকে $(1 + x)^n$–আকৃতিতে লেখা গেলে তার বিস্তৃতির x–এর সহগসমূহের নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্যসমূহ জানা প্রয়োজন ঃ

(ক) n যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে প্রথম এবং শেষ পদ থেকে সমান দূরত্বে অবস্থিত পদ দুটির সহগ সমান। যেমন $(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে শুরু থেকে তৃতীয় পদের সহগ $^7c_2$ এবং শেষ থেকে তৃতীয় (অর্থাৎ শুরু থেকে ষষ্ঠ, যেহেতু পদের সংখ্যা $7 + 1 = 8$) পদের সহগ $^7c_5$ এবং $^7c_2 = {}^7c_5$;

(খ) $(1 + x)^n$–এর বিস্তৃতিতে সবগুলি পদের সহগের যোগফল হবে 2^n ;

(গ) $(1 + x)^n$–এর জোড় পদসমূহের সহগগুলির যোগফল সমান এবং উভয়ের মান হবে 2^{n-1}

(ঘ) $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির পদসমূহের সহগগুলির প্রতিটির বর্গমান নিলে বর্গমানসমূহের যোগফল হবে $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

১০.১ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ এবং $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ কে বিস্তৃত কর

সমাধান ঃ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + {}^6c_1x^{6-1}\left(\frac{1}{x}\right)^1 + {}^6c_2x^{6-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2$

$+ {}^6c_3x^{6-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^6c_4x^{6-4}\left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6c_5x^{6-5}\left(\frac{1}{x}\right)^5$

$+ {}^6c_6x^{6-6}\left(\frac{1}{x}\right)^6$

$= x^6 + 6x^5\frac{1}{x} + 15x^4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 20x^3\left(\frac{1}{x}\right)^3$

$+ 15x^2\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 6x\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + {}^6c_1x^{6-1}\left(-\frac{1}{x}\right)^1 + {}^6c_2x^{6-2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2$

$$+ {}^6c_3\, x^{6-3} \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + {}^6c_4\, x^{6-4} \left(-\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6c_5\, x^{6-5} \left(-\frac{1}{x}\right)^5$$

$$+ {}^6c_6\, x^{6-6} \left(-\frac{1}{x}\right)^6$$

$$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

১০.২ $\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{y}\right)^4$ — কে বিস্তৃত কর।

সমাধান ঃ $\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{3}\right)^4 + {}^4c_1 \left(\frac{x}{3}\right)^{4-1} \left(\frac{2}{y}\right)^1 +$

$${}^4c_2 \left(\frac{x}{3}\right)^{4-2} \left(\frac{2}{y}\right)^2 + {}^4c_3 \left(\frac{x}{3}\right)^{4-3} \left(\frac{2}{y}\right)^3 + \left(\frac{2}{y}\right)^4$$

$$= \frac{x^4}{81} + \frac{8x^3}{27y} + \frac{8x^2}{3y^2} + \frac{32x}{3y^3} + \frac{16}{y^4}$$

১০.৩ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে দশমিকের পর সর্বোচ্চ তিন অংক পর্যন্ত $(10.1)^5$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(10.1)^5 = \left(10 + \frac{1}{10}\right)^5$

$$= 10^5 + {}^5c_1\, 10^{5-1} \frac{1}{10} + {}^5c_2\, 10^{5-2} \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$+ {}^5c_3\, 10^{5-3} \left(\frac{1}{10}\right)^3 + {}^5c_4\, 10^{5-4} \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

$$+ {}^5c_5\, 10^{5-5} \left(\frac{1}{10}\right)^5$$

$$= 10^5 + 5.10^4 \frac{1}{10} + 10.\, 10.^3 \frac{1}{10^2} +$$

$$10.\, 10.^2 \frac{1}{10^3} + 5.\, 10^2.\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5}$$

$$= 100000 + 5000 + 100 + 1 + .005$$

$$= 105101.005$$

১০.৪ মান নির্ণয় কর : $(\sqrt{3}+2)^5+(\sqrt{3}-2)^5$

সমাধান : $(\sqrt{3}+2)^5=(\sqrt{3})^5+{}^5C_1(\sqrt{3})^4.2+{}^5C_2(\sqrt{3})^3.2^2+$
$${}^5C_3(\sqrt{3})^2 2^3+{}^5C_4\sqrt{3}.2^4+2^5 \ldots (1)$$

এবং $(\sqrt{3}-2)^5=(\sqrt{3})^5-{}^5C_1(\sqrt{3})^4.2+{}^5C_2(\sqrt{3})^3.2^2$
$$-{}^5C_3(\sqrt{3})^2.2^3+{}^5C_4\sqrt{3}.2^4-2^5 \quad \ldots (2)$$

(যোজনের মাধ্যমে) $(\sqrt{3}+2)^5+(\sqrt{3}-2)^5$
$$=2(\sqrt{3})^5+2.{}^5C_2(\sqrt{3})^3.2^2+2.{}^5C_4\sqrt{3}.2^4$$
$$=18\sqrt{3}+240\sqrt{3}+160\sqrt{3}$$
$$=418\sqrt{3}$$

১০.৫ (ক) $\left(\frac{2x}{3}-3\right)^7$–এর চতুর্থ পদ এবং (খ) $\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{3x}\right)^6$–এর পঞ্চম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : (ক) চতুর্থ পদ $=t_{3+1}={}^7C_3\left(\frac{2x}{3}\right)^{7-3}3^3$
$$=560x^4$$

(খ) পঞ্চম পদ $t_{4+1}={}^6C_4\left(\frac{x}{5}\right)^{6-4}\left(\frac{5}{3x}\right)^4$
$$=\frac{125}{27x^2}$$

১০.৬ $(1+a+x)^5$–কে বিস্তৃত কর।

সমাধান : ধরা যাক $a+x=y$ সেক্ষেত্রে

$$(1+a+x)^5=(1+y)^5=1+{}^5C_1y+{}^5C_2y^2+{}^5C_3y^3+{}^5C_4y^4+y^5$$
$$=1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$$

y-এর মান বসিয়ে, $=1+5(a+x)+10(a+x)^2+10(a+x)^3+5(a+x)^4+(a+x)^5$

$$= 1 - 5(a + x) + 10(a^2 + 2ax + x^2)$$
$$+ 10(a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3)$$
$$+ 5(a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4)$$
$$+ (a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5)$$

এখানে $(a + x)^4$ এবং $(a + x)^5$–কেও দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃত করা হয়েছে।

১০.৭ মধ্যপদ নির্ণয় কর : (ক) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{10}$; (খ) $\left(3x - \frac{x^3}{6}\right)^9$

সমাধান : (ক) মোট পদের সংখ্যা $= 10 + 1 = 11$, মধ্যপদ হবে ষষ্ঠ এবং ষষ্ঠ পদ বা $t_{5+1} = {}^{10}C_5 \left(\frac{x}{y}\right)^{10-5} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^5 = {}^{10}C_5 = 252$

(খ) মোট পদের সংখ্যা $= 9 + 1 = 10$, মধ্যপদ হবে দুটি — পঞ্চম ও ষষ্ঠ।

পঞ্চম পদ বা $t_{4+1} = {}^9C_4 (3x)^{9-4} \left(- \frac{x^3}{6}\right)^4 = \frac{189}{8} x^{17}$ এবং

ষষ্ঠ পদ বা $t_{5+1} = {}^9C_5 (3x)^{9-5} \left(- \frac{x^3}{6}\right)^5 = - \frac{21}{16} x^{19}$

১০.৮ $\left(2x^5 - \frac{1}{x^2}\right)^{11}$–এর বিস্তৃতিতে x^6 এর সহগ কত?

সমাধান : ধরা যাক, $(r + 1)$ তম পদে x^6 থাকবে।

t_{r+1} পদটি হবে ${}^{11}c_r (2x^5)^{11-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$ এবং t_{r+1} তম পদে x–এর সূচক

$= 5(11 - r) - 2r$

$(t_{r+1}$ তম পদ $= {}^{11}c_r\, 2^{11-r} x^{5(11-r)} x^{-2r})$

$= 55 - 7r$

শর্তানুযায়ী $55 - 7r = 6 \quad \therefore r = \frac{55 - 6}{7} = 7$

অতএব x^6 থাকবে $(7 + 1)$–তম বা অষ্টম পদে।

$t_{7+1} = {}^{11}c_7 (2x^5)^{11-7} \left(\frac{1}{x^2}\right)^7 = {}^{11}c_7 2^{11-7} \cdot x^{5(11-7)} \cdot x^{-2.7}$

$$= {}^{11}c_7.2^4x^6$$

এবং x^6 এর সহগ $= {}^{11}c_7.2^4 = 5280$

১০.৯ ১০.৮ উদাহরণের দ্বিপদী বিবৃতির বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ বিস্তৃতিতে $r + 1$ তম পদে x^5 থাকলে $t_{r+1} = {}^{11}c_r(2x^5)^{11-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$

এবং $(r + 1)$ তম পদে x–এর সূচক $= 5(11 - r) - 2r = 55 - 7r$

শর্তানুযায়ী $55 - 7r = 5$ বা $r = \frac{55 - 5}{7} = \frac{50}{7}$; কিন্তু কোন পদ বিস্তৃতিতে কততম তার উত্তর ভগ্নাংশ সংখ্যা হতে পারে না। অতএব বিস্তৃতিতে এমন কোন পদ নেই যাতে x^5 আছে। সুতরাং বিস্তৃতিতে x^5–এর সহগও নির্ণয় সম্ভব নয়।

১০.১০ $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{12}$–এর বিস্তৃতিতে x বিহীন পদটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক পদটি $(r + 1)$–তম এবং তা হবে

$$t_{r+1} = {}^{12}c_r(x^2)^{12-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r$$

$$= {}^{12}c_r\left(-\frac{1}{2}\right)^r.x^{2(12-r)}.x^{-r}$$

$(r + 1)$–তম পদে x–এর সূচক $= 2(12 - r) - r$

$= 24 - 3r$

কিন্তু $(r + 1)$–তম পদটি x বিহীন হলে x–এর সূচক হবে 0

অতএব $24 - 3r = 0 \quad \therefore r = 8$

এবং x বিহীন পদটি হবে $(8 + 1)$ তম বা নবম পদ।

এই নবম পদটি হবে ${}^{12}c_8(x^2)^{12-8}\left(-\frac{1}{2x}\right)^8 = \frac{495}{256}$

১০.১১ $(1 + x)^{20}$–এর বিস্তৃতিতে n–তম পদ এবং $(n - 1)$–তম পদের সহগের অনুপাত 1 ঃ 2 হলে n–এর মান কত?

সমাধান ঃ n–তম পদের সহগ $= {}^{20}C_{n-1}$

$(n + 1)$–তম পদের সহগ $= {}^{20}C_n$

শর্তানুযায়ী, $\frac{^{20}C_{n-1}}{^{20}C_n} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{\frac{20!}{(n-1)!\,(20-n+1)!}}{\frac{20!}{n!\,(20-n)!}} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{n!\,(20-n)!}{(n-1)!\,(20-n+1)!} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{n(n-1)!\,(20-n)!}{(n-1)!\,(20-n+1)\,(20-n)!} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{n}{20-n+1} = \frac{1}{2}$ যেখান থেকে, $2n = 20 - n + 1$

এবং $n = 7$

১০.১২ $(1 + x)^n$–এর বিস্তৃতিতে তিনটি পরপর অবস্থিত পদের সহগসমূহের অনুপাত $1 : 2 : 3$ হলে n–এর মান কত? পদ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক পদ তিনটি যথাক্রমে r–তম, (r + 1) তম এবং (r + 2) তম।

r তম পদের সহগ = $^nC_{r-1}$

(r + 1) তম পদের সহগ = ^nC_r

(r + 2) তম পদের সহগ = $^nC_{r+1}$

শর্তানুযায়ী, $\frac{^nC_{r-1}}{^nC_r} = \frac{1}{2}$ বা, $\frac{\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}}{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{r}{n-r+1} = \frac{1}{2}$ $\therefore\ 3r = n + 1 \ldots\ldots (1)$

এবং $\frac{^nC_r}{^nC_{r+1}} = \frac{2}{3}$ বা, $\frac{r+1}{n-r} = \frac{2}{3}$ $\therefore\ 5r = 2n - 3 \ldots (2)$

(1) এবং (2) সমাধান করে $r = 5$ এবং $n = 14$

পদ তিনটি হবে পঞ্চম, ষষ্ঠ এবং সপ্তম।

পঞ্চম পদ $^{14}C_4x^4$

ষষ্ট পদ = $^{14}c_5x^5$

সপ্তম পদ = $^{14}c_6x^6$

১০.১৩ $(1 + x)^{13}$ এর বিস্তৃতিতে সপ্তম এবং নবম পদ সমান হলে x–এর মান কত

সমাধান ঃ সপ্তম পদ $t_{6+1} = {}^{13}c_6x^6$ এবং

নবম পদ $t_{8+1} = {}^{13}c_8\, x^8$

শর্তানুযায়ী $^{13}c_6\, x^6 = {}^{13}c_8x^8$

বা, $\dfrac{13!}{6!\,(13-6)!}\,x^6 = \dfrac{13!}{8!(13-8)!}\,x^8$

বা, $\dfrac{8!5!}{6!7!}\,x^6 = x^8$

বা, $\dfrac{4}{3}\,x^6 - x^8 = 0$

বা, $x^6\left(\dfrac{4}{3} - x^2\right) = 0$ হয় $x^6 = 0 \therefore x = 0$

নয়তো, $\dfrac{4}{3} - x^2 = 0 \therefore\ x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

১০.১৪ $\left(2x^2 + \dfrac{k}{x}\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 600 হলে k–এর মান কত?

সমাধান ঃ ধরা যাক, (r + 1) তম পদে x^2 আছে এবং (r + 1) তম পদ

$t_{r+1} = {}^4c_r\,(2x^2)^{4-r}\left(\dfrac{k}{x}\right)^r$

$= {}^4c_r\,2^{4-r}.k^r.x^{8-3r}$

শর্তানুযায়ী $x^{8-3r} = x^2$ বা, $8 - 3r = 2 \therefore r = 2$

এবং x^2 এর সহগ $= {}^4c_2\,2^{4-2}k^2$

$= 24\,k^2$

শর্তানুযায়ী $24k^2 = 600 \therefore k^2 = \dfrac{600}{24} = 25 \therefore k = \pm 5$

১০.১৫ $(1 + x)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে যদি (5x + 2) তম পদের সহগ 3r তম পদের সহগের সমান হয় তবে r এর মান কত?

সমাধান ঃ 5r + 2 তম পদের সহগ $= {}^{16}c_{3r-1}$

3r–তম পদের সহগ $= {}^{16}c_{3r-1}$

শর্তানুযায়ী $^{16}c_{5r+1} = {}^{16}c_{3r-1}$, কিন্তু তা সম্ভব যদি

$5r + 1 = 16 - 3r + 1$ হয় (যেহেতু $^nc_n = {}^nc_{n-1}$)

বা, $5r + 1 = 16 - 3r + 1$

বা, $8r = 16$

$\therefore r = 2$

১০.১৬ $(x + a)^n$–এর বিস্তৃতিতে তৃতীয়, চতুর্থ এবং পঞ্চম পদ যথাক্রমে 240, 160 এবং 60 হলে x, a এবং n–এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(x + a)^n$–এর বিস্তৃতিতে ৩য় পদ $= {}^nc_2x^{n-2}a^2$

৪র্থ পদ $= {}^nc_3x^{n-3}a^3$

৫ম পদ $= {}^nc_4x^{n-4}a^4$

শর্তানুযায়ী, $^nc_2\, x^{n-2}a^2 = 240$

বা, $\frac{n(n-1)}{2}\, x^{n-2}a^2 = 240 \ldots (1)$

$^nc_3\, x^{n-3}a^3 = 160$ বা, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, x^{n-3}a^3 = 160 \ldots\ldots (2)$

$^nc_4x^{n-4}a^4 = 60$

বা, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\, x^{n-4}a^4 = 60 \ldots (3)$

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করলে, $\frac{3x}{a(n-2)} = \frac{3}{4} \ldots (4)$

(2) কে (3) দ্বারা ভাগ করলে, $\frac{4x}{a(n-3)} = \frac{8}{3} \ldots (5)$

(5) কে (4) দ্বারা ভাগ করলে, $\frac{n-2}{n-3} = \frac{4}{3} \Rightarrow n = 6$

(1) এবং (2) এ n–এর মান বসিয়ে,

$x^4a^2 = 16 \ldots (6)$

$x^3a^3 = 8 \ldots (7)$

(6) কে (7) দ্বারা ভাগ করলে $\frac{x}{a} = 2$ বা $x = 2a$

(6) এ $x = 2a$ বসিয়ে, $16a^6 = 16 \;\therefore\; a = 1$

এবং $x = 2a = 2.1 = 2$

অতএব প্রদত্ত দ্বিপদী বিবৃতিতে $x = 2$, $a = 1$ এবং $n = 6$

১০.১৭ ক) $\sqrt{1-x}$ এবং (খ) $(1+x)^{\frac{3}{2}}$কে বিস্তৃত কর।

সমাধান ঃ (ক) $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}.(-x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x)^2$

$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-x)^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}$

$(-x)^4 + \ldots$

$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{4}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \ldots$

খ) $(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}.x + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3!}x^3 +$

$\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)(\frac{3}{2}-3)}{4!}x^4 + \ldots$

$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{5}{128}x^4 + \ldots$

১০.১৮ দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে $\sqrt[4]{626}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\sqrt[4]{626} = (626)^{\frac{1}{4}} = (625+1)^{\frac{1}{4}} = 625^{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$

$= 5\left(1 + \frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$

$= 5\left[1 + \frac{1}{4}.\frac{1}{625} + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!}\left(\frac{1}{625}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}\right.$

$\left.\left(\frac{1}{625}\right)^3 + \ldots\right]$

শেষের দিকের মানসমূহ অতীব ক্ষুদ্র বিবেচনায় 4 টি পদ নেয়াই যথেষ্ট।

$$= 5\left[1 + \frac{1}{2500} - \frac{3}{32 \times (626)^2} \cdots\right]$$

$$= 5\,[\,1 + .0004 - .00000024 \ldots\,]$$

$$= 5\,(1.00039976)$$

$$= 5.0019988$$

১০.১৯ দশমিকের 4 অংক পর্যন্ত নিয়ে 250 এর পঞ্চম মূল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\sqrt[5]{250} = (250)^{\frac{1}{5}} = (243 + 7)^{\frac{1}{5}} = 243^{\frac{1}{5}}\left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$= 3\left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 3\left[1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2\,!}\left(\frac{7}{243}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= 3\,[\,1 + .00576 - .0000664 \ldots\,]$$

$$= 3 \times 1.056936$$

$$= 3.0171$$

অনুশীলনী — ১০

১. বিস্তৃত কর ঃ $(2x - \frac{1}{3}y)^4$

২. $(y + \sqrt{y^2 + 1})^5 + (y - \sqrt{y^2 + 1})^5$ এর মান নির্ণয় কর।

৩. বিস্তৃত কর ঃ $(1 - x + x^3)^4$

৪. (ক) $(x + 4y)^{27}$–এর নবম পদ এবং (খ) $\left(\frac{2x}{3} + \frac{3}{2x}\right)^{11}$–এর ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর।

৫. x–এর সূচক 4 পর্যন্ত নিয়ে $(1 + x + x^2)^7$ এর বিস্তৃতির প্রথম পদগুলি নির্ণয় কর। এর সাহায্যে $(1.0204)^7$ এর মান নির্ণয় কর।

৬. $\left(5x - \frac{1}{x^3}\right)^{19}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে তার বিস্তৃতিতে x^9 সহ কোন পদ নেই।

৭. $(1 + x)^9$ এর বিস্তৃতিতে ষষ্ঠ পদটি চতুর্থ পদের 13.5 গুণ হলে x–এর মান কত?

৮. $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতিতে জোড় পদসমূহের যোগফল x এবং বিজোড় পদসমূহের যোগফল y। প্রমাণ কর যে $x^2 - y^2 = (a^2 - b^2)^n$

৯. (ক) $\left(x + \frac{3x}{2}\right)^7$ এবং (খ) $\left(\frac{2x}{5} - \frac{y}{2}\right)^4$ এর মধ্যপদসমূহ নির্ণয় কর।

১০. $\left(\frac{k}{2} + 2\right)^6$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ 540 হলে k–এর মান কত?

১১. $\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

১২. $\left(2p - \frac{1}{p^2}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে p^{-7} এর সহগ কত?

১৩. $(3 - kx)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এবং x^3 এর সহগ সমান হলে k এর মান কত?

১৪. $(1 + x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ সমান হলে r এর মান কত?

১৫. $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে 32, 240 এবং 720 হলে x, y এবং n এর মান নির্ণয় কর।

১৬. $(1 + x)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 4)$ তম পদের সহগ $(2r - 2)$ তম পদের সহগের সমান হলে r এর মান কত?

১৭. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তৃতীয় পদটি দ্বিতীয় পদের চারগুণ এবং চতুর্থ পদটি তৃতীয় পদের দ্বিগুণ হলে x এবং n এর মান নির্ণয় কর।

১৮. দশমিকের পর চার অংক পর্যন্ত নিয়ে $\sqrt[3]{28}$ এর মান নির্ণয় কর।

১৯. $(1 - x + x^2)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ কত?

২০. দশমিকের পর চার অংক পর্যন্ত নিয়ে $\sqrt[3]{998}$ এর মান নির্ণয় কর।

একাদশ অধ্যায়

সমান্তরাল ও সমানুপাতিক প্রগমণ

[ARITHMATIC AND GOMETRIC PROGRESSION]

কতিপয় ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা বা রাশিকে যদি কোন নির্দিষ্ট বিধি অনুযায়ী পর্যায়ক্রমিকভাবে সাজানো যায় অর্থাৎ কোন নির্দিষ্ট মানদণ্ডের বিচারে তাদের থেকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ইত্যাদি স্থানের সংখ্যা বা রাশি নির্ধারণ করা যায় তবে সেক্ষেত্রে বলা যায় যে সংখ্যা বা রাশিগুলি একটি ক্রম (Sequence) অনুসরণ করে। যেমন, 1, 5, 3, 4, 2 এই পাঁচটি সংখ্যাকে 1, 2, 3, 4, 5 এইভাবে সাজানো যায়, যেখানে প্রথম সংখ্যাটি 1 এবং পরের প্রতিটি সংখ্যা তার পূর্ববর্তী সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশি। আবার 1, 4, 9, 16 এ সংখ্যাগুলিও একটি ক্রম তৈরি করে কেন না এদেরকে $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$–এভাবে লেখা যায় এবং তাদের সাধারণ পদকে $u_n = n^2$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায় অর্থাৎ সংখ্যাগুলি নির্দিষ্ট বিধি অনুযায়ী সাজানো সারিতে পড়ে।

নির্দিষ্ট ক্রম অনুযায়ী সাজানো যায় এমন সংখ্যাসমূহের সারি আকারে প্রকাশিত বিবৃতিকে প্রগমন (Progression) বলা হয়। 1, 3, 5, 7, ... সারিতে সাজানো সংখ্যাগুলির প্রথম সংখ্যা 1 এবং পরের প্রতিটি সংখ্যা তার পূর্ববর্তী সংখ্যা অপেক্ষা 2 বেশী, অর্থাৎ তাদের নির্দিষ্ট ক্রম অনুযায়ী সাজানো যায়। সুতরাং 1, 3, 5, 7, ... একটি প্রগমন। আবার প্রগমণের সংখ্যা (বা রাশি) পর পর যোজনের মাধ্যমে যে বিবৃতি তৈরি করে তাকে ধারা (series) বলে। প্রদত্ত প্রগমণটির জন্য ধারা হচ্ছে 1 + 3 + 5 + 7 ...

সমান্তর প্রগমণ

সমান্তর প্রগমণ (arithmatic progression) বলতে কতিপয় সংখ্যা বা রাশির এরকম একটি ক্রমকে বুঝায় যার একটি নির্ধারিত প্রথম পদ থাকে এবং পরের প্রতিটি সংখ্যা (বা রাশি) পূর্ববর্তী সংখ্যার (বা রাশির) সংগে নির্দিষ্ট প্রভেদ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) বজায় রাখে। এই নির্দিষ্ট পরিমাণ প্রভেদকে সাধারণ অন্তর (common difference) বলে।

উল্লেখ্য যে, সমান্তর প্রগমণের শেষ পদের উল্লেখ থাকতেও পারে নাও থাকতে পারে। কোন সমান্তর প্রগমণে যদি শেষ পদ উল্লেখের সাহায্যে প্রগমণটির শেষ সংখ্যা (বা রাশি) দেয়া থাকে তবে তার দ্বারা তৈরি ধারাকে সসীম সমান্তর প্রগমণ (finite arithmatic series) বলা হয়।

8, 13, 18, 23, ..., 48, 53 একটি সসীম সমান্তর প্রগমণ এবং তার দ্বারা তৈরি ধারাটি হবে 8 + 13 + 18 + 23 + ... + 48 + 53, যার প্রথম পদ 8, সাধারণ অন্তর + 5, এবং শেষ পদ 53 । 5, $\frac{5}{2}$, 0, $-\frac{5}{2}$, -5, $-\frac{15}{2}$ ... একটি অসীম (infinite) সমান্তর প্রগমণ এবং তার ধারাটি হবে $5+\frac{5}{2}+0-\frac{5}{2}-5-\frac{15}{2}-\ldots$ । এ ধারার প্রথম পদ 5, সাধারণ অন্তর $-\frac{5}{2}$ এবং ধারাটি অসীম সংখ্যক পদ পর্যন্ত বিস্তৃত।

অনেক সময় সসীম সমান্তর প্রগমণের শেষ পদটি উল্লেখ না করে প্রগমণের মোট পদের সংখ্যা (অথবা শেষ পদটি কততম তা) বলে দেয়া হয়। যেমন,

2, 9, 16, 23, ... মোট 10 টি পদ (বা দশম পদ পর্যন্ত)।

সমান্তর প্রগমণের প্রথম পদকে সাধারণত a, সাধারণ অন্তরকে d, মোট পদের সংখ্যাকে n এবং শেষ পদকে l দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এবং সমান্তর প্রগমণের সাধারণ আকৃতি হচ্ছে

a, a + d, a + 2d, a + 3d ... এবং সংশ্লিষ্ট সমান্তর ধারাকে

a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + ... দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উপরে ব্যাখ্যার ভিত্তিতে সমান্তর প্রগমণ এবং সংশ্লিষ্ট বিষয়সমূহের সংজ্ঞা নিম্নোক্তভাবে উপস্থাপন করা যায় ঃ

কতিপয় সংখ্যার ক্রমিক অবস্থানে যদি n–তম পদ u_n এবং (a + 1)–তম পদ u_{n+1} হয় এবং $(u_{n+1} - u_n)$ অর্থাৎ (n + 1)–তম পদ এবং n–তম পদের মানগত পার্থক্য যদি যদি সর্বদা স্থির থাকে তবে ক্রমটিকে সমান্তর প্রগমণ এবং $(u_{n+1} - u_n)$–এর মানকে সাধারণ অন্তর বলা হয়।

সমান্তর প্রগমণের সূত্রাবলী

ক) সমান্তর প্রগমণের পদ ঃ কোন সমান্তর প্রগমণের প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে, সমান্তর প্রগমণের r -তম পদ = a + (r – 1) d । প্রগমণে মোট n টি পদ থাকলে শেষ পদ l হবে n তম পদ এবং সেক্ষেত্রে l = a + (n – 1) d

খ) সমান্তর ধারার যোগফল ঃ সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ l এবং মোট পদের সংখ্যা n হলে সমান্তর ধারার যোগফল $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$

তবে শেষ পদ জানা না থাকলেও l = a + (n – 1) d, যেখানে d = সাধারণ অন্তর ব্যবহার করে ধারার যোগফল নির্ণয় করা যায় এবং

$S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$ (উপরের সূত্রে l = a + (n – 1) d বসিয়ে)

১১.১ 2 + 10 + 18 ... ... ধারার একাদশতম পদটি কত? 50 ধারাটির কততম পদ?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ধারার প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d = +8$

$\therefore$ 11 তম পদ $= a + (11 - 1) d$

$= 2 + 10.8$

$= 82$

ধরা যাক 50 ধারাটির n তম পদ, সেক্ষেত্রে $50 = a + (n - 1) d$

$= 2 + (n - 1) 8$

$= 8n - 6$

বা, $56 = 8n$

$n = 7$

অর্থাৎ 50 হবে সপ্তম পদ

১১.২ একটি সমান্তর প্রগমণের সপ্তম পদ 15 এবং নবম পদ 27 হলে প্রগমণটির প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। প্রগমণটির ধারা কি হবে দেখাও।

সমাধান ঃ ধরা যাক প্রগমণটির প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$ সেক্ষেত্রে পঞ্চম পদ হবে $a + (5 - 1) d = a + 4d$

এবং নবম পদ হবে $a + (9 - 1) d = a + 8d$

শর্তানুযায়ী, $a + 4d = 15$ এবং

$a + 9d = 27$

সমীকরণদ্বয় সমাধান করে $a = 3$ এবং $d = +3$ অর্থাৎ প্রগমণটির প্রথম পদ $= 3$ এবং সাধারণ অন্তর $= +3$। আর ধারাটি হবে

$$3 + (3 + 3) + (3 + 2.3) + (3 + 3.3) + \ldots$$

$$= 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots$$

১১.৩ কোন সসীম সমান্তর প্রগমণের শেষ পদ 21 ; সাধারণ অন্তর – 2 এবং মোট পদসংখ্যা 11 হলে প্রগমণটির প্রথম পদ এবং ধারা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ শেষ পদ $l = 21$, সাধারণ অন্তর $d = -2$, পদসংখ্যা $n = 11$ প্রথম পদ a হলে $l = a + (n - 1) d$

বা $21 = a + (11 - 1)(-2)$

$\therefore a = 41$

ধারাটি হবে $a + (a + d) + (a + 2d) + ... + \{a + (11 - 1) d\}$

$= 41 + (41 - 2) + \{41 + 2 (-2)\} + ... + 21$

$= 41 + 39 + 37 + ... + 21$

১১.৪ কোন সমান্তর প্রগমণের x তম পদ y এবং y তম পদ x হলে প্রমাণ কর যে তার n–তম পদ $= x + y - n$ এবং $(x + y)$-তম পদ $= 0$

সমাধান ঃ ধরা যাক, প্রগমণটির প্রথম পদ $= a$ এবং

সাধারণ অন্তর $= d$

সেক্ষেত্রে x-তম পদ $y = a + (x - 1) d \quad ... (1)$

y–তম পদ $x = a + (y - 1) d \quad ... (2)$

(1) এবং (2) সমাধানের মাধ্যমে $a = x + y - 1$ এবং $d = -1$

$\therefore$ n-তম পদ $= a + (n - 1) d = (x + y - 1) + (n - 1) (-1)$

$= x + y - n$

এবং $(x + y)$ তম পদ $= a + (x + y - 1) d = (x + y - 1) +$

$(x + y - 1) (-1) = 0$

১১.৫ যোগফল নির্ণয় কর ঃ ক) $35 + 30 + 25 + ... + 5$

খ) $5 + 7\frac{1}{2} + 10 + 12\frac{1}{2} + ..$ 25 তম পদ পর্যন্ত

গ) $\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \left(1 + \frac{3}{n}\right) + ...$ n তম পদ পর্যন্ত

ঘ) $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 20$ তম পদ

সমাধান ঃ ক) প্রথম পদ $a = 35$, সাধারণ অন্তর $d = -5$, শেষ পদ

$l = 5$, পদসংখ্যা n হলে $l = a + (n - 1) d$

বা, $5 = 35 + (n - 1) (-5)$

$\therefore n = 7$

এবং যোগফল $S_n = \frac{n (a + l)}{2} = \frac{7 (35 + 5)}{2} = 140$

খ) প্রথম পদ $a = 5$, সাধারণ অন্তর $d = \frac{5}{2}$, পদের সংখ্যা

$n = 25$, এবং শেষ পদ l হলে $l = a + (n - 1) d$

$$= 5 + (25 - 1)\frac{5}{2}$$

$$= 65$$

$\therefore$ যোগফল $S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{25(5+65)}{2} = 875$

[ভিন্নভাবে সমাধান করলে, $S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$

$$= \frac{25}{2}\left\{2.5 + (25-1)\frac{5}{2}\right\} = 875$$]

গ) প্রথম পদ $a = 1 + \frac{1}{n}$, সাধারণ অন্তর $d = \frac{1}{n}$ এবং পদের সংখ্যা $n = n$

$\therefore$ যোগফল $S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$

$$= \frac{n}{2}\left\{2\left(1+\frac{1}{n}\right) + (n-1)\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{2}(3n+1)$$

ঘ) প্রথম পদ $a = 2$, সাধারণ অন্তর $d = +3$, পদের সংখ্যা $n = 2n$

$\therefore$ যোগফল $= \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$

$$= \frac{2n}{2}\left\{2.2 + (2n-1)3\right\}$$

$$= n(6n-1)$$

১১.৬ কোন ধারার পদসমূহ সমান্তর প্রগমনে থাকলে এবং তার পঞ্চম ও নবম পদ যথাক্রমে 21 এবং 37 হলে 15 তম পদ পর্যন্ত ধারাটির যোগফল নির্ণয় কর। ধারায় মোট কতটি পদ থাকলে তার যোগফল 189 হবে?

সমাধান ঃ মনে করি ধারার প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$

শর্তানুযায়ী, পঞ্চম পদ $a + (5-1)d$ বা $a + 4d = 21$ ... (1)

এবং নবম পদ $a + (9-1)d$ বা $a + 8d = 37$ ... (2)

(1) এবং (2) সমাধান করে $a = 5$ এবং $d = +4$ এবং ধারাটি হবে $5 + 9 + 13 + 17 + \dots$

15–তম পদ পর্যন্ত তার যোগফল $= \frac{15}{2}\left\{2.5 + (15-1)4\right\}$

$$= 495$$

আবার যোগফল 189 হলে $189 = \frac{n}{2}\left\{2.5 + (n-1)4\right\}$

$= 2n^2 + 3n$

বা $2n^2 + 3n - 189 = 0 \therefore n = 9$ অথবা $n = -\frac{21}{2}$

কিন্তু n–এর মান ভগ্নাংশ কিংবা ঋণাত্মক হতে পারে না। সুতরাং যোগফল 189 হলে ধারায় মোট পদ থাকবে 9টি।

১১.৭ 1 থেকে 1000 পর্যন্ত 5 দ্বারা বিভাজ্য সকল বেজোড় সংখ্যার যোগফল কত?

সমাধান ঃ 1 থেকে 1000 পর্যন্ত 5 দ্বারা বিভাজ্য বিজোড় সংখ্যাগুলি হবে 5, 15, 25, 35 ... 995 এবং তাদের যোগফল যে ধারা তৈরি করে তা হচ্ছে 5 + 15 + 25 + ... 995। ধারাটির পদের সংখ্যা n হলে $995 = 5 + (n-1)10 \therefore n = 100$ এবং যোগফল $= \frac{100}{2}(5 + 995) = 50000$

১১.৮ কোন সমান্তর ধারার n সংখ্যক, 2n সংখ্যক এবং 3n সংখ্যক পদের যোগফল যথাক্রমে S_1, S_2 এবং S_3 হলে প্রমাণ কর যে $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

সমাধান ঃ মনে করি ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

n-সংখ্যক পদের যোগফল $S_1 = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$

2n সংখ্যক পদের যোগফল $S_2 = \frac{2n}{n}\left\{2a + (2n-1)d\right\}$

3n সংখ্যক পদের যোগফল $S_3 = \frac{3n}{2}\left\{2a + (3n-1)d\right\}$

এখন $3(S_2 - S_1) = 3\left[\frac{2n}{2}\left\{2a + (2n-1)d\right\} - \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}\right]$

$= 3\left[n(2a + 2nd - d) - n\left(a + \frac{nd}{2} - \frac{d}{2}\right)\right]$

$= 3n\left[2a + 2nd - d - a - \frac{nd}{2} + \frac{d}{2}\right]$

$= 3n\left[a + \frac{3}{2}nd - \frac{d}{2}\right]$

$= \frac{3n}{2}\left[2a + (3n-1)d\right]$

$= S_3$ প্রমাণিত।

১১.৯ দুটি সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের যোগফলের অনুপাত $3n + 1 : n + 3$ হলে তাদের পঞ্চম পদদ্বয়ের অনুপাত কত?

সমাধান : ধরা যাক, প্রথম ধারাটি $a_1 + (a_1 + d_1) + (a_1 + 2d_1) + \ldots + \{a_1 + (n-1)d_1\}$

এবং দ্বিতীয় ধারাটি $a_2 + (a_2 + d_2) + (a_2 + 2d_2) + \ldots + \{a_2 + (n-1)d_2\}$

প্রথম ধারার n সংখ্যক পদের যোগফল $= \frac{n}{2}\left\{2a_1 + (n-1)d_1\right\}$

দ্বিতীয় ধারার n সংখ্যক পদের যোগফল $= \frac{n}{2}\left\{2a_2 + (n-1)d_2\right\}$

যোগফলদ্বয়ের অনুপাত $\dfrac{\frac{n}{2}\left\{2a_1 + (n-1)d_1\right\}}{\frac{n}{2}\left\{2a_2 + (n-1)d_2\right\}}$

বা, $$\frac{2a_1 + (n-1)d_2}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{3n+1}{n+4} \ldots (1)$$

আবার ধারাদ্বয়ের পঞ্চম পদদ্বয়ের অনুপাত $= \dfrac{a_2 + 4d_1}{a_2 + 4d_2}$

সমীকরণ (1) থেকে $\dfrac{a_1 + 4d_1}{a_2 + 4d_2}$ পেতে হলে $n = 9$ বসাতে হবে, এবং সেক্ষেত্রে

$$\frac{2a_1 + (9-1)d_1}{2a_2 + (9-1)d_2} = \frac{3.9+1}{9+4}$$

বা, $$\frac{a_1 + 4d_1}{a_2 + 4d_2} = \frac{28}{13}$$

সমান্তর প্রগমণের পদসমূহের প্রকাশ

সমান্তর প্রগমণের প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর ব্যবহার করে পরোক্ষভাবে প্রগমণের মধ্য পদ নির্ধারণ করে অতঃপর উভয় পাশে বিস্তারের মাধ্যমে প্রগমণের সব ক'টি পদকে সুবিধাজনক উপায়ে প্রকাশ করা যায়। প্রগমণে পদের সংখ্যা বিজোড় হলে মধ্য পদটি a ধরা যায়। সেক্ষেত্রে প্রগমণের সাধারণ অন্তর d হলে মধ্যপদের পূর্বের পদটি হবে $a - d$ এবং পরের পদটি হবে $a + d$। আবার প্রগমণের মোট পদের সংখ্যা জোড় হলে মধ্যপদ হবে দুটি এবং তাদের যথাক্রমে $a - d$ এবং $a + d$ ধরলে সাধারণ অন্তর =

$2d$ এবং মধ্য পদদ্বয়ের পূর্ববর্তী পদটি হবে $a - 3d$ এবং পরবর্তী পদটি হবে $a + 3d$। এভাবে, কোন সমান্তর ধারায়

ক. তিনটি পদ থাকলে তাদের $a - d, a, a + d$

খ. চারটি পদ থাকলে তাদের $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$

গ. পাঁচটি পদ থাকলে তাদের $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ ইত্যাদি আকারে প্রকাশ করা যায়।

১১.১০ তিনটি সংখ্যা x, y এবং z সমান্তর ধারায় থাকলে প্রমাণ কর যে $x^3 + 4y^3 + z^3 = 3y(x^2 + z^2)$

সমাধান ঃ

ধরা যাক, $x = a - d$, $y = a$, $z = a + d$

সেক্ষেত্রে $x^3 + 4y^3 + z^3 = (a - d)^3 + 4a^3 + (a + d)^3$

$= 6a(a^2 + d^2)$

এবং $3y(x^2 + z^2) = 3a[(a - d)^2 + (a + d)^2]$

$= 6a(a^2 + d^2)$

$\therefore\ x^3 + 4y^3 + z^3 = 3y(x^2 + z^2)$ প্রমাণিত

১১.১১ 4টি সংখ্যার একটি সমান্তর ধারার যোগফল 20 এবং শেষ সংখ্যাটি প্রথম সংখ্যার 4 গুণ হলে ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি ধারাটির পদসমূহ হবে $a - 3d$, $a - d$, $a + d$ এবং $a + 3d$ সেক্ষেত্রে তাদের যোগফল $a - 3d + a - d + a + d + a + 3d = 20$

বা, $4a = 20 \quad \therefore\ a = 5$

আবার, $a + 3d = 4(a - 3d)$ অর্থাৎ $5 + 3d = 4(5 - 3d) \therefore d = 1$

$\therefore$ ধারাটি $(5 - 3.1) + (5 - 1) + (5 + 1) + (5 + 3.1)$ বা $2 + 4 + 6 + 8$

১১.১২ সমান্তর প্রগমণের তিনটি সংখ্যার যোগফল 12 এবং তাদের সবকটির বর্গমানের যোগফল 50 হলে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক সংখ্যা তিনটি যথাক্রমে $a - d$, a এবং $a + d$

শর্তানুযায়ী, $a - d + a + a + d = 12 \therefore a = 4$

এবং $(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 50$

বা, $3a^2 + 2d^2 = 50$

বা, $3.4^2 - 2d^2 = 50$

বা, $2d^2 = 50 - 3.4^2 = 2$ $\therefore d = 1$ অথবা -1

অতএব সংখ্যা তিনটি হবে $4-1, 4, 4+1$ কিংবা $4-(-1), 4, 4+(-1)$ অর্থাৎ 3, 4, 5 কিংবা 5, 4, 3

১১.১৩ গত দশ বছরে বাজারের চালের দাম পর্যবেক্ষণ করে দেখা গেছে যে প্রতি বছর তার দাম মন প্রতি 15 টাকা করে বৃদ্ধি পেয়েছে। বর্তমানে একমন চালের দাম 400 টাকা হলে দশ বছর আগে একমন চালের দাম কত ছিল?

সমাধান ঃ মনপ্রতি দাম বৃদ্ধিকে সাধারণ অন্তর $d = 15$ টাকা ধরলে, দশ বছর আগে একমন চালের দাম a টাকা এবং বছরের সংখ্যা $n = 10$ এবং বর্তমানে একমন চালের দাম $l = 400$ টাকা এবং $l = a + (n-1)d$

বা, $400 = a + (10 - 1)15$

$\therefore a = 265$ অর্থাৎ দশ বছর আগে একমন চালের দাম ছিল 265 টাকা।

১১.১৪ এক ব্যক্তি অপর এক ব্যক্তিকে কিছু পরিমাণ টাকা ঋণ দিয়ে তার সঙ্গে চুক্তি করল যে ধার পরিশোধের কিস্তি হিসাবে সুদ ও আসলের অংশ মিলিয়ে প্রতি বছর সে পূর্ববর্তী বছরের চেয়ে 100 টাকা বেশি নেবে। ঐ ব্যক্তি 9 বছরে মোট 7200 টাকা নিলে প্রথম বছর সে কত নিয়েছিল?

সমাধান ঃ মনে করি প্রথম বছর শেষে নেয়া টাকার পরিমাণ = a

বছরের সংখ্যা = 9 ; সাধারণ অন্তর = 100

মোট গৃহীত টাকা $7200 = \frac{9}{2}\left\{2a + (9-1)100\right\}$

$= 9(a + 400)$

$\therefore a = 400$ অর্থাৎ প্রথম বছর ঐ ব্যক্তি 400 টাকা নিয়েছিল।

১১.১৫ একটি যন্ত্রের বর্তমান মূল্য 100,000 টাকা। তার অবচিতির হার প্রতি বছর 1% হিসাবে কমতে থাকলে এবং প্রথম বছর অবচিতির হার 12% হলে 7 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য কত ধরা যাবে? (সরল হারে অবচিতি পরিমাণ ধরতে হবে)।

সমাধান ঃ যন্ত্রটির মূল্য 100 টাকা হলে 7 বছরে মোট অবচিতির পরিমাণ $12 + 11 + 10 + \ldots$ 7 তম পদ পর্যন্ত $= \frac{7}{2}\{2.12 + (7-1)(-1)\} = 63$ এবং 7 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য $= 100 - 63 = 37$ টাকা।

∴ যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য 100,000 হলে 7 বছর পর তার মূল্য হবে $37 \times \frac{100000}{100} = 37000$ টাকা

১১.১৬ একটি কোম্পানির 100 টাকার প্রতিটি শেয়ারের মূল্য প্রতি বছর পূর্ববর্তী বছরের চেয়ে 10 টাকা করে বৃদ্ধি পায়। এক ব্যক্তি ঐ কোম্পানির কিছু শেয়ার কেনার দশ বছর পর দেখলেন যে তাঁর মোট শেয়ারের বর্তমান মূল্য 5700 টাকা। তিনি কত টাকার শেয়ার কিনেছিলেন? কেনার পাঁচ বছর পর তাঁর শেয়ারসমূহের মোট মূল্য কত ছিল?

সমাধান ঃ মনে করি ব্যক্তিটি x সংখ্যক শেয়ার কিনেছিলেন। x সংখ্যক শেয়ারের মোট মূল্য 100x, দ্বিতীয় বছরে তার শেয়ারসমূহের মোট মূল্য দাঁড়ায় (100 + 10) x, তৃতীয় বছরে মোট মূল্য (100 + 20) x ... এভাবে দশম বছরে তার শেয়ারের মূল্য {100 + (10 – 1) 10} x = 190x

শর্তানুযায়ী 190x = 5700 ∴ x = 30

ব্যক্তিটি প্রথমে 30টি শেয়ার কিনেছিলেন এবং তার মোট মূল্য

$300 \times 100 = 3000$ টাকা।

পঞ্চম বছরে তার শেয়ারসমূহের মোট মূল্য

$= \{100 + (5 - 1) 10\} 30 = 4200$ টাকা।

১১.১৭ এক ব্যক্তি 4500 টাকা ঋণ নিয়ে বিনাসুদে তা 12 কিস্তিতে পরিশোধ করতে চাইলেন এবং প্রতি কিস্তিতে পূর্ববর্তী কিস্তির চেয়ে নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা বেশি দেবেন বলে রাজি হলেন। কিন্তু 8 কিস্তি পরিশোধের পর দেখা গেল তিনি আর কোনভাবেই ঋণ পরিশোধ করতে পারছেন না। তখনও আর 2300 টাকা বকেয়া থাকলে ঐ ব্যক্তি প্রথম পাঁচ কিস্তিতে কত টাকা দিয়েছিলেন?

সমাধান ঃ ধরা যাক প্রথম কিস্তিতে পরিশোধের পরিমাণ = a এবং কিস্তিসমূহের সাধারণ অন্তর = d

12 কিস্তিতে মোট পরিশোধের পরিমাণ $= \frac{12}{2} \{2a - (12 - 1) d\}$

$= 6 (2a + 11d)$

8 কিস্তিতে মোট পরিশোধের পরিমাণ $= \frac{8}{2} \{2a + (8 - 1) d\}$

$= 4 (2a + 7 d)$

শর্তানুযায়ী 12 কিস্তিতে শোধের পরিমাণ $4500 = 6 (2a + 11d)$ ... (1)

এবং 8 কিস্তিতে শোধের পরিমাণ $4500 - 2300 = 4(2a + 7d) \ldots (2)$

(1) এবং (2) কে সমাধানের মাধ্যমে $a = 100$ এবং $d = 50$; অতএব প্রথম 5 কিস্তিতে দিয়েছিলেন

$$100 + (100 + 50) + (100 + 2.50) + (100 + 3.50) + (100 + 4.50)$$
$$= 100 + 150 + 200 + 250 + 300 = \frac{5}{2}(100 + 300) = 1000 \text{ টাকা}$$

১১.১৮ এক ব্যক্তি 9600 টাকা ঋণ গ্রহণের পর সমান্তর প্রগমণের 48টি বার্ষিক কিস্তিতে তা পরিশোধ করার কথা দেয়। 40 কিস্তি পরিশোধের পর দেখা গেল তাঁর পক্ষে ঋণের বাকি 2400 টাকা পরিশোধ করা সম্ভব নয়। ঐ ব্যক্তির ঋণ পরিশোধের প্রথম তিনটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর (সুদ হিসাবে করতে হবে না)।

সমাধান ঃ

ধরা যাক কিস্তিসমূহ $a, a + d, a + 2d, a + 3d \ldots 48$ তম পদ পর্যন্ত সমান্তর প্রগমণ তৈরি করে যেখানে a = প্রথম কিস্তির পরিমাণ এবং d = সাধারণ অন্তর।

48 কিস্তির মোট যোগফল $9600 = \frac{48}{2}[2a + (48 - 1)d]$

$= 24(2a + 47d)$

বা, $2a + 47d = 400 \quad \ldots (1)$

40 কিস্তির মোট যোগফল $= 9600 - 2400$

$= 7200$

এবং $7200 = \frac{40}{2}[2a + (40 - 1)d]$

$= 20(2a + 39d)$

বা, $2a + 39d = 360 \quad \ldots (2)$

(1) এবং (2) সমাধান করে $a = 82.50$

$b = 5.00$

অতএব প্রথম তিনটি কিস্তির পরিমাণ হবে যথাক্রমে 82.50, 87.50 এবং 92.50

১১.১৯ এক ব্যক্তি দুটি চাকরিতে যোগ দেবার প্রস্তাব পেলেন। প্রথম চাকরিতে প্রারম্ভিক মাসিক বেতন 1850 টাকা এবং দ্বিতীয়টিতে 1750 টাকা। বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির হার প্রথম চাকরির ক্ষেত্রে 100 টাকা এবং দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে 125 টাকা। ঐ ব্যক্তি চাকরির

দশ বছরে বেতন হিসাবে মোট পাওনার পরিমাণকে ভিত্তি করে সিদ্ধান্ত নিলে তার জন্য কোন চাকরিতে যোগ দেয়া অধিকতর যুক্তিযুক্ত?

সমাধান ঃ

প্রথম চাকরিতে দশ বছরে মোট বেতন

$$= \frac{10}{2}\left[2 \times 1850 + (10-1)\,100\right] \times 12$$

$$= 5\,[\,3700 + 900\,] \times 12$$

$= 276000$ টাকা

দ্বিতীয় চাকরিতে দশ বছরে মোট বেতন

$$= \frac{10}{2}\left[2 \times 1750 + (10-1)\,125\right]$$

$$= 5\,[\,3500 + 1125\,] \times 12$$

$= 277500$ টাকা

মোট বেতন দ্বিতীয় চাকরিতে বেশি বলে ঐ ব্যক্তির জন্য দ্বিতীয়টিতে যোগ দেয়াই অধিকতর যুক্তিযুক্ত।

সমানুপাতিক প্রগমণ

সমানুপাতিক প্রগমণ বলতে কতিপয় সংখ্যার বা রাশির একটি ক্রমকে বুঝায় যেখানে প্রথম পদের পর প্রতি পরবর্তী পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা স্থির থাকে। অর্থাৎ কোন প্রগমণের n–তম পদ u_n এবং $(n+1)$ তম u_{n+1} হলে $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ সর্বদা একটি নির্ধারিত মানের সমান। সমানুপাতিক প্রগমণের দ্বারা তৈরি ধারাকে সমানুপাতিক ধারা (Geometric series) বলা হয়।

$1, 2, 4, 8, 16 \ldots$ কিংবা $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \ldots$ বা $25, -5, 1, -\frac{1}{5} \ldots$ ইত্যাদির প্রতিটি একেকটি সমানুপাতিক প্রগমণ। এই তিনটি প্রগমণের প্রতিটির ক্ষেত্রে পরবর্তী ও পূর্ববর্তী পদের অনুপাত যথাক্রমে $2, \frac{1}{3}$ এবং -5 এবং অনুপাত প্রতিটি প্রগমণের জন্য সর্বদা স্থির। সমানুপাতিক প্রগমণের কোন পদ এবং তার পূর্ববর্তী পদের যে স্থির অনুপাত পাওয়া যায় তাকে সমানুপাতিক প্রগমণের সাধারণ অনুপাত (common ratio) বলা হয়।

কোন সমানুপাতিক প্রগমণের প্রথম সংখ্যা (বা রাশি) a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে তার জন্য সমানুপাতিক ধারাকে নিম্নোক্ত উপায়ে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

এটিই সমানুপাতিক ধারাকে প্রকাশের সাধারণ রূপ। উল্লেখ্য যে সমান্তর ধারার মতো সমানুপাতিক ধারাও সসীম কিংবা অসীম হতে পারে। কোন সমানুপাতিক ধারায় শেষ পদ বা মোট পদের সংখ্যা এ দুটির যেকোনটির উল্লেখ থাকলে তাকে সসীম সমানুপাতিক ধারা (finite geometric progression) বলে। যদি সংখ্যা অসীম হয় তবে সেক্ষেত্রে তা হবে অসীম সমানুপাতিক ধারা (infinite geometric progression)

সমানুপাতিক প্রগমণের সূত্রাবলী

(ক) কোন সমানুপাতিক প্রগমণের প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে প্রগমণের n-তম পদ ar^{n-1}

(খ) কোন সমানুপাতিক প্রগমণের প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং মোট পদের সংখ্যা n হলে প্রগমণের পদসমূহের যোগফল

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ যেখানে } r > 1$$

এবং $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ যেখানে $r < 1$

(গ) কোন সমানুপাতিক ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং শেষ পদ l হলে ধারার যোগফল

$$S_n = \frac{a - lr}{1 - r} \text{ যেখানে } l = ar^{n-1} \text{ (n–মোট পদের সংখ্যা)}$$

সমান্তর প্রগমণের মতোই সমানুপাতিক প্রগমণেও পদের সংখ্যা বেজোড় হলে মধ্য পদকে a ধরা সুবিধাজনক। সেক্ষেত্রে তার পূর্বের পদটি হবে $\frac{a}{r}$ এবং পরের পদটি হবে ar (r–সমানুপাতিক প্রগমণের সাধারণ অনুপাত)। আবার যদি মোট পদের সংখ্যা জোড় হয় তবে মধ্যবর্তী পদ হবে দুটি এবং তাদেরকে $\frac{a}{r}$ এবং ar দ্বারা প্রকাশ করলে এই মধ্যবর্তী দুটি পদের প্রথমটির পূর্ববর্তী পদ হবে $\frac{a}{r^3}$ এবং দ্বিতীয়টির পরবর্তী পদটি হবে ar^3 $\left(\text{যেহেতু সাধারণ অনুপাত} = ar : \frac{a}{r} = r^2\right)$ এভাবে, সমানুপাতিক প্রগমণে

তিনটি পদ থাকলে তাদের $\frac{a}{r}, a, ar$ দ্বারা,

চারটি পদ থাকলে তাদের $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ দ্বারা,

পাঁচটি পদ থাকলে তাদের $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

১১.২০ কোন সমানুপাতিক প্রগমণের চতুর্থ পদ প্রথম পদের আটগুণ এবং ষষ্ঠ পদের মান 96 হলে তার ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$

তার প্রথম পদ $u_1 = a$ এবং চতুর্থ পদ $u_4 = ar^3$

শর্তানুযায়ী $u_4 = 8a$ বা $ar^3 = 8a \therefore r^3 = 8$ বা $r = 2$

আবার ষষ্ঠ পদ $u_6 = ar^5 = 96$

বা $a.2^5 = 96 \therefore a = 3$

অতএব ধারাটি হবে $3 + 3.2 + 3.2^2 + 3.2^3 + \ldots$ বা, $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$

১১.২১ কোন সমানুপাতিক ধারার পাঁচটি পদের যোগফল 52.75 এবং সাধারণ অনুপাত 1.5 ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $S_5 = \dfrac{a\,[(1.5)^5 - 1]}{1.5 - 1}$ S_5–পাঁচটি পদের যোগফল
a –ধারার প্রথম পদ

$$\text{বা}\quad 52.75 = \frac{a\left[\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= \frac{a\left[\frac{243}{32} - 1\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{a\left(\frac{211}{32}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a = \frac{52.75 \times \frac{1}{2} \times 32}{211} = 4$$

প্রথম পদ 4 এবং সাধারণ অনুপাত 1.5 হলে, ধারাটি হবে

$$4 + \{(4 \times 1.5)\} + \{4 \times (1.5)^2)\} + \{4 \times (1.5)^3\} + \ldots$$

$$= 4 + 6 + 9 + 13.5 + \ldots$$

১১.২২ নিচের ধারাগুলির যোগফল নির্ণয় কর ঃ

(ক) $10 + 20 + 40 + \ldots + 40$ তম পদ ; (খ) $246 + 164 + 109\frac{1}{3} + \ldots$ n–তম পদ পর্যন্ত ; (গ) $9 + 99 + 999 + \ldots$ 10–তম পদ পর্যন্ত ; (ঘ) $.6 + .66 + .666 + \ldots$ n তম পর্যন্ত।

সমাধান ঃ

(ক) প্রথম পদ $a = 10$, সাধারণ অন্তর $r = 2 > 1$; পদের সংখ্যা $n = 40$

$\therefore$ যোগফল $S_n = \dfrac{10\,(2^{40} - 1)}{2 - 1} = 10\,(2^{40} - 1)$

(খ) $a = 246,\ r = \dfrac{164}{246} = \dfrac{109\frac{1}{3}}{164} = \dfrac{2}{3} < 1$

পদের সংখ্যা $= n$ $\therefore$ যোগফল $S_n = \dfrac{246\,\{1 - (\frac{2}{3})^n\}}{1 - \frac{2}{3}} = 738\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$

(গ) $S_n = 9 + 99 + 999 + \ldots +$ 10–তম পদ

$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots + (10^{10} - 1)$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{10}) - (1 + 1 + 1 + \ldots$ 10–তম পদ)

$= \dfrac{10\,(10^{10} - 1)}{10 - 1} - 10$

$= \dfrac{10}{9}\,(10^{10} - 1) - 10 = \dfrac{10}{9}\,(10^{10} - 1 - 9) = \dfrac{10}{9}\,(10^{10} - 10)$

$= \dfrac{100}{9}\,(10^9 - 1)$

(ঘ) $.6 + .66 + .666 + \ldots +$ n–তম পদ

$= 6\,(.1 + .11 + .111 + \ldots +$ n–তম পদ)

$= \dfrac{6}{9}\,[(1 - .1) + (1 - .01) + (1 - .001) + \ldots +$ n–তম পদ]

$= \dfrac{6}{9}\,[(1 + 1 + \ldots +$ n–তম পদ) — $(.1 + .01 + .001 + \ldots +$ n–তম পদ)]

$$= \frac{6}{9}\left[n \quad \left\{ \frac{\frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}} \right\}\right]$$

$$= \frac{6}{9}n - \frac{6}{9}\left\{ \frac{\frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{\frac{9}{10}} \right\}$$

$$= \frac{6}{9} n - \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{6}{9} \left[n - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right]$$

১১.২৩ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^6} + \ldots$ ধারাটি অসীম হলে তার যোগফল কত ?

সমাধান ঃ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^6} + \ldots$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{3^2}\right)^{\infty}\right]}{1 - \frac{1}{3^2}} + \frac{\frac{1}{4^2}\left[1 - \left(\frac{1}{4^2}\right)^{\infty}\right]}{1 - \frac{1}{4^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{8}{9}} + \frac{\frac{1}{16} \times 1}{\frac{15}{16}}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{15} = \frac{53}{120}$$

যেহেতু প্রথম অংশে $a = \frac{1}{3}$; $r = \frac{1}{3^2}$ এবং দ্বিতীয় অংশে, $a = \frac{1}{4^2}$, $r = \frac{1}{4^2}$, এবং উভয় অংশেই পদের সংখ্যা ∞ (অসীম)

১১.২৪ একটি অসীম সমানুপাতিক ধারার পদসমূহের যোগফল 16 এবং পদসমূহের সবকটির বর্গমানের যোগফল $85\frac{1}{3}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক, ধারাটির প্রথম পদ = a সাধারণ অনুপাত = r এবং ধারাটি হবে $a + ar + ar^3 + \ldots + ar^{\infty}$

ধারাটির যোগফল সসীম হলে $0 < r < 1$ অথবা $-1 < r < 0$

এবং $S_{\infty} = \frac{[1 - r^{\infty}]}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$ যেহেতু r সংখ্যাগতভাবে 1–অপেক্ষা ছোট একটি ভগ্নাংশ

শর্তানুসারে, $\frac{a}{1-r} = 16$ ... (1)

আবার $a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 + ... + a^2r^{\infty}$

$$= \frac{a^2[1-(r^2)^{\infty}]}{1-r^2} = \frac{a^2}{1-r^2}$$

শর্তানুসারে, $\frac{a^2}{1-r^2} = 85\frac{1}{3} = \frac{256}{3}$ ... (2)

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করলে $\frac{a}{1+r} = \frac{16}{3}$ ... (3)

(1) এবং (3) সমাধান করলে পাওয়া যাবে $a = 8$ এবং $r = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটি হবে $8 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + ...$

১১.২৫ তিনটি সংখ্যা সমানুপাতিক প্রগমণে থাকলে যদি তাদের যোগফল 52 এবং তাদের প্রথম ও তৃতীয়টির গুণফল 144 হয় তবে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি সংখ্যা তিনটি $\frac{a}{r}$, a এবং ar

শর্তানুযায়ী $\frac{a}{r} + a + ar = 52$ এবং $\frac{a}{r} \times ar = 144$

বা $a^2 = 144$ $\therefore a = \pm 12$

যদি $a = 12$ হয় তবে $\frac{12}{r} + 12 + 12r = 52 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$ অথবা $r = 3$

সংখ্যাত্রয় হবে 4, 12, 36 অথবা 36, 12, 4

১১.২৬ সমানুপাতিক ধারার তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 65। প্রথম ও শেষ উভয় সংখ্যাকে 3 দিয়ে গুণ করলে এবং সংখ্যা তিনটির মধ্যমাকে 5 দিয়ে গুণ করলে গুণফলসমূহ যদি সমান্তর প্রগমণে সাজানো যায় তবে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক সংখ্যা তিনটি a, ar এবং ar^2

সেক্ষেত্রে, $a + ar + ar^2 = 65$ ... (1)

আবার সংখ্যা তিনটি সমানুপাতিক প্রগমণে বলে তাদের মধ্যমা = ar

প্রথম ও তৃতীয় সমানুপাতিক প্রগমণে বলে তাদের মধ্যমা = ar

প্রথম ও তৃতীয় সংখ্যাকে 3 দ্বারা গুণ করলে গুণফল যথাক্রমে $3a$ এবং $3ar^2$, মধ্যমাকে 5 দ্বারা গুণ করলে গুণফল $= 5ar$ এখন, $3a, 5ar, 3ar^2$ সমান্তর প্রগমণে উপস্থিত হলে

$$5ar - 3a = 3ar^2 - 5ar$$

বা, $3ar^2 - 10ar - 3a = 0$

বা, $a(3r^2 - 10r + 3) = 0 \quad \rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0$

$\therefore\ r = \frac{1}{3}$ অথবা $r = 3$

(1) সমীকরণে $r = \frac{1}{3}$ বসিয়ে,

$$a + \frac{a}{3} + \frac{a}{9} = 65 \rightarrow a = 45$$

অতএব $r = \frac{1}{3}$, $a = 45$ হলে সংখ্যা তিনটি হবে 45, 15, 5

(1) নং সমীকরণে $r = 3$ বসালে $a = 5$ এবং তখন সংখ্যা তিনটি হবে 5, 15, 45।

১১.২৭ শতকরা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 16% হারে কত টাকা জমা রাখার পর পঞ্চম বছরে 10000 টাকায় পরিণত হবে?

সমাধান ঃ প্রথম বছরে সুদ ও আসলের পরিমাণ $= P$

দ্বিতীয় বছরে সুদ ও আসলের পরিমাণ $= P(1 + .16) = P(1.16)$

তৃতীয় বছরে সুদ ও আসলের পরিমাণ $= P(1 + .16)^2 = P(1.6)^2$

চতুর্থ বছরে সুদ ও আসলের পরিমাণ $= P(1 + .16)^3 = P(1.16)^3$

পঞ্চম বছরে সুদ ও আসলের পরিমাণ $= P(1.16)^{5-1} = P(1.16)^4$

[তুলনা কর ঃ সমানুপাতিক প্রগমণের পঞ্চম সংখ্যা $= ar^{n-1}$]

শর্তানুসারে, $P(1.16)^4 = 10000 \therefore\ P = \frac{10000}{(1.16)^4} = 5522.91$ টাকা।

১১.২৮ ঢাকা শহরের জনসংখ্যা প্রতি বছর হাজার প্রতি 40 জন বৃদ্ধি পেলে শহরের লোক সংখ্যা বর্তমানে যা আছে তার দ্বিগুণ হতে কত বছর সময় লাগবে?

সমাধান ঃ ধরা যাক বর্তমানে লোক সংখ্যা $= A$ এবং n-তম বছরে লোক সংখ্যা দ্বিগুণ হলে তা দাঁড়াবে $2A$।

প্রতি বছর পর পর লোকসংখ্যার পরিমাণ নির্ণয় করলে পরিমাণসমূহ সমানুপাতিক প্রগমণে থাকবে। তার প্রথম সংখ্যা হবে A, সাধারণ অনুপাত $1 + \frac{40}{1000} = 1.04$ এবং n-তম সংখ্যা = 2A। সমানুপাতিক সূত্রানুযায়ী

$2A = A\,(1.04)^{n-1}$ [2A = n তম পদ, A = প্রথম পদ, 1.04 = সাধারণ অনুপাত]

বা, $2 = (1.04)^{n-1}$

বা, $\log 2 = (n-1)\log(1.04)$

বা, $.301 = (n-1)(.017) \Rightarrow n = 18.7$ বছর।

১১.২৯ একটি যন্ত্রের ক্রয়মূল্য 30,000 টাকা। ব্যবহারের প্রথম 3 বছর তার অবচিতির হার 10% এবং পরবর্তীতে 12%। ক্রয়ের 7 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য কত হবে?

সমাধান ঃ 3 বছর পর অর্থাৎ চতুর্থ বছরের শুরুতে যন্ত্রটির মূল্য = $30000\,(.9)^3$

(যেহেতু সমানুপাতিক প্রগমণে সাজালে প্রথম সংখ্যা

= 30000, সাধারণ অনুপাত = 1 – .1 = .9)

= 21870

7 বছর পর অর্থাৎ অষ্টম বছরের শুরুতে যন্ত্রটির মূল্য হবে $21870\,(.88)^{8-4} = 21870\,(.88)^4$ (যেহেতু এবারের সাধারণ অনুপাত = 1 – .12 = .88)

= 13115.34 টাকা।

১১.৩০ 2187 সংখ্যাটি 3, 9, 27, 81 ... প্রগমণের কততম পদ?

সমাধান ঃ 3, 9, 27, 81 ... প্রগমণটি সমানুপাতিক এবং তার প্রথম পদ $a = 3$, সাধারণ অনুপাত $r = 3$। এখন 2187 তার n-তম পদ হলে

$2187 = 3.3^{n-1}$ বা, $2187 = 3^n$

বা, $3^7 = 3^n$ $\therefore n = 7$ অর্থাৎ 2187 হবে সপ্তম পদ।

১১.৩১ একটি সমানুপাতিক ধারার n-তম পদ 2.3^{n-1} হলে ধারাটির প্রথম পদ এবং সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ধারাটির নবম পদ কত হবে? প্রথম নয়টি পদের যোগফল কত?

সমাধান ঃ প্রথম পদ $= 2.3^{1-1} = 2$

দ্বিতীয় পদ $= 2.3^{2-1} = 2.3$

তৃতীয় পদ $= 2.3^{3-1} = 2.3^2$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত 3 এবং নবম পদ $= 2.3^{9-1} = 2.3^8 = 13122$

ধারাটির প্রথম নয়টি পদের যোগফল $= \dfrac{2(3^9 - 1)}{3 - 1} = 19682$

১১.৩২ চারটি সংখ্যার প্রথম তিনটি সমান্তর প্রগমণে এবং শেষের তিনটি সমানুপাতিক প্রগমণে সাজানো গেলে এবং তাদের প্রথম ও শেষটির যোগফল 11 আর দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির যোগফল 10 হলে সংখ্যা চারটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক, সংখ্যা চারটির প্রথম তিনটি $a - d$, a এবং $a + d$। চতুর্থ সংখ্যাটি x হলে a, $a + d$ এবং x সমানুপাতিক প্রগমণে বলে

$$\frac{a + d}{a} = \frac{x}{a + d} \quad \therefore \; x = \frac{(a + d)^2}{a}$$

প্রথম এবং চতুর্থটির যোগফল $a - d + \dfrac{(a + d)^2}{a} = 11$ ... (1)

দ্বিতীয় এবং তৃতীয়টির যোগফল $a + a + d = 10$ ... (2)

(2) থেকে $d = 10 - 2a$

(1) এ d–এর এই মান বসালে

$$a - (10 - 2a) + \frac{a + (10 - 2a)^2}{a} = 11 \quad \text{... (3)}$$

(3) সমাধান করলে $a = 4$ অথবা $a = \dfrac{25}{4}$

$a = 4$ হলে $d = 10 - 2a = 2$, এবং সংখ্যা চারটি হবে 2, 4, 6 এবং 9

$a = \dfrac{25}{4}$ হলে $d = 10 - 2a = -\dfrac{5}{2}$, এবং সংখ্যা চারটি হবে $\dfrac{35}{4}, \dfrac{25}{4}, \dfrac{15}{4}$ এবং $\dfrac{9}{4}$

অনুশীলনী — ১১

১. প্রগমণ কাকে বলে? প্রগমণ এবং ধারার মধ্যে পার্থক্য কি?

২. সমান্তর প্রগমণের সংজ্ঞা দাও। কোন সমান্তর প্রগমণকে সাধারণভাবে প্রকাশের পদ্ধতি বিবৃত কর।

৩. সমান্তর ধারার সাধারণ পদ ও যোগফল কিভাবে নির্ধারণ করা যায়?

৪. সমানুপাতিক প্রগমণের সংজ্ঞা দাও। সমান্তর ও সমানুপাতিক প্রগমণের মধ্যে পার্থক্য কি?

৫. প্রগমণের সাধারণ অন্তর এবং সাধারণ অনুপাত দ্বারা কি বোঝায় উদাহরণসহ বর্ণনা কর।

৬. সমান্তর ও সমানুপাতিক প্রগমণের পদসমূহকে বর্ণনার পদ্ধতির তুলনামূলক আলোচনা কর।

৭. নিচের ধারাসমূহের প্রতিটির সপ্তম এবং n–তম পদ নির্ণয় কর ঃ

ক. $3 + 4\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3} + 7 \ldots$ খ. $23 + 19 - 15 + 11 + \ldots$

গ. $-\frac{13}{7} - \frac{10}{7} - 1 - \frac{4}{7} - \ldots$

৮. ধারা ৭ (ক) এর 10 টি পদের এবং ৭ (খ)–এর n–সংখ্যক পদের যোগফল কত?

৯. ধারা ৭ (গ)–এর কোন পদের মান 2 ?

১০. ধারা ৭ (খ)–এর মোট কতটি পদের যোগফল — 15 ?

১১. প্রমাণ কর যে ধারা ৭ (ক)–এ এমন কোন পদ নেই যার মান 16।

১২. কোন সমান্তর ধারার পঞ্চম পদ 10 এবং দশম পদ 5 হলে ধারাটি নির্ণয় কর।

১৩. একটি সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের যোগফল $2n^2$ হলে ধারাটির সপ্তম পদ কত?

১৪. একটি সমান্তর ধারার প্রথম তিনটি পদের যোগফল 6 এবং প্রথম ৬টি পদের যোগফল 0 হলে ধারার চতুর্থ পদটি কত? ধারাটির প্রথম 10 টি পদের যোগফল কত?

১৫. 100 থেকে 1000 পর্যন্ত 7 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য সকল সংখ্যার যোগফল কত?

১৬. সমান্তর প্রগমণে সাজানো (ক) তিনটি সংখ্যার যোগফল 33 এবং গুণফল 1320 হলে সংখ্যা তিনটি কি কি? (খ) তিনটি সংখ্যার যোগফল 18 এবং তাদের সবকটির বর্গমানের যোগফল 126 হলে সংখ্যা তিনটি কি কি?

১৭. সমান্তর প্রগমণের চারটি সংখ্যার যোগফল 42 এবং তাদের সবকটির বর্গমানের যোগফল 486। সংখ্যা চারটি নির্ণয় কর।

১৮. সমান্তর প্রগমণের পাঁচটি সংখ্যার যোগফল 20। তাদের প্রথম ও শেষটির গুণফল 15। সংখ্যা পাঁচটি নির্ণয় কর।

১৯. স্নাতক সম্মান পাঠক্রমে তিন বছরে মোট 6টি টার্মের প্রতি টার্মে গড়ে 250 নম্বরের হিসাবে মোট 1500 নম্বরের মধ্যে পরীক্ষা দিতে হয়। একটি ভাল ছাত্র প্রথম টার্মে পরীক্ষা খারাপ করায় 250–এর মধ্যে মোট 130 পেয়ে সিদ্ধান্ত নিল যে এরপর থেকে সে প্রথম শ্রেণীতে সম্মান পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হবার জন্য প্রতি টার্মে পূর্ববর্তী

টার্মের চেয়ে ৪ (আট) হিসাবে বেশি পাবার চেষ্টা করবে। উক্ত ছাত্রের এ চেষ্টা সফল হলে তার পক্ষে স্নাতক সম্মানে প্রথম শ্রেণীতে উত্তীর্ণ হওয়া সম্ভব কি না সমান্তর প্রগমণের সাহায্যে তা দেখাও। শেষ টার্মের পরীক্ষায় তাকে অন্তত শতকরা কত নম্বর পেতে হবে?

২০. একটি প্রতিযোগিতায় প্রতি পর্যায়ে 15 জন করে বাদ পড়লে এবং চূড়ান্ত পর্যায়ে ওঠার জন্য প্রতিযোগীদের মোট 7 টি পর্যায় অতিক্রম করতে হলে যদি দেখা যায় যে চূড়ান্ত পর্বে মোট 12 জন প্রতিযোগী অংশ নিয়েছে তবে শুরুতে প্রতিযোগীদের মোট সংখ্যা কত ছিল?

২১. একজন সরকারি কর্মচারির মাসিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ প্রতি বছরে 100 টাকা। বর্তমানে তার মাসিক বেতন 2750 টাকা হলে এবং তার মোট চাকরির সময়ের গড় মাসিক বেতন 2200 টাকা হলে তিনি কতদিন হয় এই চাকরিতে নিয়োজিত আছেন?

২২. একটি টেলিভিশনের মূল্য 21000 টাকা। বিক্রির মুহূর্তে বিক্রেতা ক্রেতার নিকট 9000 টাকা নগদ গ্রহণ করে এবং অবশিষ্ট কিস্তিতে দেয়। প্রথম কিস্তিতে 1500 টাকা এবং পরবর্তীতে পূর্বের চেয়ে 100 টাকা হিসাবে কম দিতে হলে মোট কত বছরে টেলিভিশনের মূল্য পরিশোধিত হবে?

২৩. একটি সাইকেল কারখানা প্রতিষ্ঠার প্রথম বছরে 700 টি সাইকেল তৈরি করে। কারখানাটি 5 বছরে মোট 30000 টি সাইকেল তৈরি করলে প্রতি বছর উৎপাদন বৃদ্ধির হার কত? দশ বছরে কারখানাটি কতগুলি সাইকেল তৈরি করবে?

২৪. $(1+x)^n$–এর বিস্তৃতিতে r–তম, $(r+1)$ তম এবং $(r+2)$–তম পদ তিনটির সহগ সমান্তর প্রগমণে থাকলে প্রমাণ কর যে $n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$

২৫. দুটি সমান্তর ধারার প্রথম ও দ্বিতীয় উভয়ের n–তম পদের অনুপাত $(7n+5) : (5n+17)$ হলে প্রমাণ কর যে তাদের ষষ্ঠ পদ দুটি সমান।

২৬. একটি সমানুপাতিক প্রগমণের ষষ্ঠ পদ তার তৃতীয় পদের বর্গমানের সমান এবং পঞ্চম পদের মান 32 হলে প্রগমণটি নির্ণয় কর।

২৭. যোগফল নির্ণয় কর ঃ ক) $5 + 10 + 20 + 40 \ldots\ldots$ 11 টি পদের ; খ) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots$ 11টি পদের ; গ) $12 + 104 + 1008 + 10016 + \ldots\ldots$ n পদের ; ঘ) $5 - 55 + 555 + \ldots\ldots$ n পদের ; ঙ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \ldots\ldots\infty$; চ) $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{18} + \ldots\ldots$ 10 টি পদের।

২৮. সমান্তর ধারার তিনটি সংখ্যার যোগফল 39। এদের প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সংখ্যার সংগে যথাক্রমে 2, 5 এবং 11 যোগ করলে সংখ্যাত্রয় একটি সমানুপাতিক ধারা তৈরি করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

২৯. কোন সমানুপাতিক ধারার তিনটি সংখ্যার যোগফল 19 এবং তাদের সবকটির বর্গমানের যোগফল 133 হলে সংখ্যা তিনটি কি কি?

৩০. $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}, \ldots\ldots$ প্রগমণের দশম সংখ্যাটি কত?

৩১. 0.6343434 .... কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ কর।

৩২. একটি সমানুপাতিক ধারার চতুর্থ সংখ্যা $\frac{1}{16}$ এবং সপ্তম সংখ্যা $\frac{1}{128}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর এবং তার নবম পদ কত হবে দেখাও।

৩৩. কোন সমানুপাতিক ধারার প্রথম তিনটি পদের যোগফল $6\frac{1}{3}$ এবং পঞ্চম পদ $6\frac{3}{4}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর।

৩৪. সমানুপাতিক ধারার এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাদের যোগফল $9\frac{1}{2}$ এবং গুণফল 27।

৩৫. সমানুপাতিক ধারার এমন চারটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাদের সবকটির গুণফল $\frac{1}{9}$ এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থটির গুণফল 1।

৩৬. সমানুপাতিক ধারার তিনটি সংখ্যার গুণফল 216 এবং যোগফল 19 হলে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

৩৭. একটি শহরের জনসংখ্যা প্রতি বছর হাজারে 30 জন হারে বৃদ্ধি পেলে এবং তার বর্তমান জনসংখ্যা 50000 হলে চার বছর পর ঐ শহরের মোট জনসংখ্যা কত হবে?

৩৮. একটি কারখানা ভবনের বর্তমান মূল্য 500000 টাকা এবং তার যন্ত্রপাতির মূল্য 4,50000 টাকা। ভবনের অবচিতির হার ৭% এবং যন্ত্রপাতির অবচিতির হার 20% হলে পাঁচ বছর পর ভবন ও যন্ত্রপাতির মোট মূল্য নির্ধারণ কর।

৩৯. শতকরা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি কত হার সুদে কোন পরিমাণ টাকা 4 বছরে দ্বিগুণ হবে?

৪০. একটি কোম্পানি প্রতি বছর অতিরিক্ত 50000 টাকা বিনিয়োগ করলে এবং এই বিনিয়োগ থেকে বার্ষিক 10% হারে আয় হলে 10 বছর পর বিনিয়োগের মূল্য কত হবে?

দ্বাদশ অধ্যায়

সম্ভাবনা

[PROBABILITY]

কোন ঘটনা ভবিষ্যতে ঘটবে কি না এ প্রশ্নের উত্তর তিনভাবে দেয়া যায় ঃ (ক) ঘটবে (খ) ঘটবে না (গ) ঘটতে পারে, নাও ঘটতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘটনাটির ভবিষ্যৎ সম্পর্কে নিশ্চিতভাবে জানা যায়, কিন্তু তৃতীয় ক্ষেত্রে তা অনিশ্চিত। তবে এ অনিশ্চয়তার মাত্রা কতখানি তা বিভিন্ন বিষয়ের ভিত্তিতে সর্বদাই নির্ধারণ করা যায়। অনিশ্চয়তার মাত্রা খুব বেশি হলে ধরা হয় ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা ক্ষীণ। পক্ষান্তরে ঘটনাটি ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রা বেশি হলে বলা হয় তা ঘটার সম্ভাবনা অনেক। গণিতে কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রাকেই তার সম্ভাবনা (probability) বলে।

কোন ঘটনা (event) অবশ্যই ঘটবে এমন হলে তার সম্ভাবনা 1 এবং তাকে নিশ্চিত (certain) ঘটনা বলে। আবার কোন ঘটনা কখনোই ঘটবে না এমন হলে তার সম্ভাবনা 0 এবং তাকে অসম্ভব (impossible) ঘটনা বলে। ঘটতেও পারে, নাও ঘটতে পারে এমন ঘটনার জন্যই শুধু সম্ভাবনা নির্ধারণ করা হয়। এ জাতীয় ঘটনাকে সম্ভাব্য (probable) ঘটনা বলে এবং তার সম্ভাবনা শূন্য থেকে এক পর্যন্ত হয়। A একটি নিশ্চিত ঘটনা হলে তা ঘটার সম্ভাবনা $P(A) = 1$, কিন্তু A অসম্ভব ঘটনা হলে $P(A) = 0$ এবং A সম্ভাব্য ঘটনা হলে $0 \leq P(A) \leq 1$

সম্ভাবনাকে গাণিতিকভাবে বিবেচনার জন্য সম্ভাবনাসংক্রান্ত অনেকগুলি ধারণা ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন। উদাহরণের মাধ্যমে এসব ধারণার ব্যাখ্যা দেয়া হল।

দৈবক্রমিক পরীক্ষা (Random experiment)

কোন একটি ক্রিয়া (operation) থেকে যখন যেকোন রকম ফল ঘটতে পারে তখন সম্ভাবনা বিচারে সে ক্রিয়াকে একটি পরীক্ষা হিসবে ধরা হয়। তবে এই ক্রিয়া যদি নির্ধারিত সমজাতীয় পরিস্থিতিতে বারবার চালানোর সময় দেখা যায় যে তার ফল বিভিন্ন সময় বিভিন্ন হলেও অনেকগুলি সম্ভাব্য ফলের যেকোন একটি হচ্ছে তবে তাকে

দৈবক্রমিক পরীক্ষা বলা হয়। অন্য কথায় দৈবক্রমিক পরীক্ষায় পূর্ব নির্ধারিত পক্ষপাতদুষ্ট (biassed) কোন ফলপ্রাপ্তির প্রয়াস থাকে না।

একটি মুদ্রার মোট দুটি পিঠ — সোজা এবং উল্টা। অতএব তাকে টস করলে সম্ভাব্য ফল হিসাবে সোজা অথবা উল্টা পিঠ পড়তে পারে। দুটিই সম্ভাব্য ঘটনা এবং যেকোন একটি ঘটতে পারে। তাই মুদ্রা টস করা একটি দৈবক্রমিক পরীক্ষা। এভাবে একটি তাসের সেট থেকে একটি তাস টেনে নিলে তা 52টির যেকোন একটি হতে পারে। এটিও একটি দৈবক্রমিক পরীক্ষা।

কোন কারখানা কর্তৃক প্রস্তুত বৈদ্যুতিক বাল্বসমূহের ত্রুটি নির্ধারণের জন্য যদি দৈবক্রমিক ভিত্তিতে 100 টি বাল্ব নেয়া হয় তবে সেগুলির প্রতিটির ত্রুটিযুক্ত অথবা ত্রুটিহীন হবার সম্ভাবনা থাকে। সে ক্ষেত্রে 100টি বাল্ব নেয়া হবে 100টি দৈবক্রমিক পরীক্ষা। কোন বিক্রয় কেন্দ্রে কতজন ক্রেতা আসে দৈনিক তা পরীক্ষামূলক ভিত্তিতে গণনা করাও দৈবক্রমিক পরীক্ষা।

মৌল ঘটনা (Elementary events)

একটি পরীক্ষার সম্ভাব্য ঘটনাসমূহের প্রতিটিই একেকটি মৌল ঘটনা। যেমন মুদ্রা টস করার বেলায় মৌল ঘটনা দুটি — সোজা পিঠ পড়া এবং উল্টা পিঠ পড়া। তাসের সেট থেকে একটি তাস টেনে নিলে মৌল ঘটনা ক্ষেত্র বিশেষে 4টি, 13টি কিংবা 52টি হতে পারে। হরতন, রুইতন, চিড়া এবং ইস্কাপন এদের প্রতিটির একটি পাওয়া একেকটি মৌল ঘটনা। সব ধরনের 13টি ভিন্ন ভিন্ন তাসের কোনটি (3, 9, K, A ইত্যাদি) পাওয়া যাবে সে অনুযায়ী মৌল ঘটনা হবে 13টি আবার নির্দিষ্ট কোন তাসটি পাওয়া যাবে সে অনুযায়ী মৌল ঘটনা হবে 52টি।

সর্বমোট ঘটনা (Exhaustive events)

কোন দৈবক্রমিক পরীক্ষার সম্ভাব্য যতটি ফল হতে পারে তাদের সমষ্টিকে বলা হয় সর্বমোট ঘটনা। একটি মুদ্রা টসের বেলায় সর্বমোট ঘটনার সংখ্যা 2, আবার দুটি মুদ্রা একত্রে টসের বেলায় সর্বমোট ঘটনা হবে 4টি (সোজা পিঠকে H এবং উল্টা পিঠকে T বললে, HH, HT, TH এবং TT)। তিনটি মুদ্রা একত্রে টস করলে সর্বমোট ঘটনা হবে ৪ (আটটি)। একসেট তাস থেকে একটি টেনে নিলে ইস্কাপন পাবার সর্বমোট ঘটনা হবে 13টি।

অনুকূল ঘটনা (Favourable events) **এবং প্রতিকূল ঘটনা** (Unfavourable events)

সম্ভাব্য সর্বমোট ঘটনার মধ্যে ঈপ্সিত ঘটনাসমূহকে অনুকূল ঘটনা এবং বাঁকিগুলিকে প্রতিকূল ঘটনা বলে। একটি মুদ্রা টস করে সোজা পিঠ পাবার অনুকূল ঘটনা 1 টি এবং প্রতিকূল ঘটনা 1টি। দুটি মুদ্রা একত্রে টস করলে দুটির সোজা পিঠ পাবার অনুকূল ঘটনা 1টি, প্রতিকূল ঘটনা 3 টি এবং সর্বমোট ঘটনা 4টি। এক সেট তাস থেকে একটি টেনে নিয়ে রাজা (K) পাবার অনুকূল ঘটনা 4টি, প্রতিকূল ঘটনা $52 - 4 = 48$ টি।

পরস্পর নাকচকারী ঘটনা (Mutually exclusive events)

দুটি ঘটনার একটিকে অপরটির নাকচকারী ঘটনা তখনই বলা হয় যখন একটি ঘটলে অপরটি ঘটার কোনই সম্ভাবনা থাকে না। একটি মুদ্রা টসের বেলায় সোজা পিঠ এবং উল্টো পিঠ পাবার ঘটনা পরস্পর নাকচকারী। চাকরীতে নিয়োগের জন্য নির্বাচনের সাক্ষাৎকারে উপস্থিত প্রার্থীর নির্বাচিত হওয়া এবং না হওয়া দুটি ঘটনা পরস্পর নাকচকারী। একজন পরীক্ষার্থীর জন্য প্রথম বিভাগে উত্তীর্ণ হওয়া এবং ফেল করা প্রতিটিই পরস্পর নাকচকারী ঘটনা কিন্তু উত্তীর্ণ হওয়া এবং প্রথম বিভাগে উত্তীর্ণ হওয়া পরস্পর নাকচকারী ঘটনা নয়।

সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা (Equally likely events)

কোন পরীক্ষার ফলসমূহের প্রতিটি ঘটার সম্ভাবনা সমান হলে তাদের সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা বলে। একটি মুদ্রা টসের ক্ষেত্রে সোজা পিঠ এবং উল্টা পিঠ পাওয়া সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা। কিন্তু 52 টি তাসের সেট থেকে একটি টেনে নিয়ে একটি হরতনের তাস পাওয়া কিংবা একটি রাজা পাওয়া সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা নয়

পরস্পর স্বাধীন ঘটনা (Independent events)

কোন পরীক্ষার কয়েকটি ফল যদি এমন হয় যে একটি ঘটলে তা অপর কোন একটি ঘটার সম্ভাবনাকে কোনভাবেই প্রভাবিত করে না তবে তাদের পরস্পর স্বাধীন ঘটনা বলে। যেমন মুদ্রা টসের ক্ষেত্রে প্রথমবার সোজা পিঠ পেলে দ্বিতীয়বারও সোজা পিঠ পাবার সম্ভাবনা সমানভাবে বজায় থাকে অর্থাৎ প্রথমবারের ফল দ্বিতীয় বারের ফলকে প্রভাবিত করে না। কিন্তু 52 টি তাসের সেট থেকে একটি টেনে নিয়ে সেটিকে আবার ফেরত না দিলে প্রথমবারে এবং দ্বিতীয়বার টেক্কা পাবার সম্ভাবনা সমান থাকে না কেন না প্রথমে 4টি টেক্কার একটি যদি উঠে যায় তবে দ্বিতীয়বার একটি উঠবে অবশিষ্ট 3 টি থেকে।

সম্ভাবনা পরিমাপের পদ্ধতি

ধ্রুপদী সম্ভাবনা (Classical probability) ঃ এই পদ্ধতিতে সম্ভাবনা নির্ণয়ের জন্য দৈবক্রমিক পরীক্ষার পরস্পর নাকচকারী সমভাবে সম্ভাব্য সর্বমোট ঘটনার সংখ্যা n এবং অনুকূল ঘটনার সংখ্যা m জানা প্রয়োজন।

$$\text{ঘটনা A ঘটার সম্ভাবনা } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{অনুকূল ঘটনার সংখ্যা}}{\text{সর্বমোট ঘটনার সংখ্যা}}$$

লক্ষণীয় যে ঘটনা না ঘটার সম্ভাবনা $P(\bar{A})$ হলে

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{প্রতিকূল ঘটনার সংখ্যা}}{\text{সর্বমোট ঘটনার সংখ্যা}} = \frac{n-m}{n}$$

$$= 1 - \frac{m}{n}$$

$$= 1 - P(A)$$

$P(A)$ এবং $P(\bar{A})$–এর সম্পর্ক থেকে সহজেই দেখা যায় যে

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ধ্রুপদী সম্ভাবনাকে গাণিতিক সম্ভাবনাও (mathematical probability) বলা হয়। এই পদ্ধতিতে সম্ভাবনা নির্ধারণের প্রধান সীমাবদ্ধতা হচ্ছে এই যে মোট ঘটনার সংখ্যা অসীম হলে সম্ভাবনা নির্ধারণ করা যায় না। সেক্ষেত্রে বড় জোর বলা যায় $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m}{\infty}$ হবে শূন্যের কাছাকাছি। এ ছাড়া মোট ঘটনার সবগুলি সমভাবে সম্ভাব্য নাও হতে পারে। সেক্ষেত্রেও এই পদ্ধতি প্রয়োগ বিধিসম্মত নয়। একজন ছাত্রের পরীক্ষায় পাশ ও ফেল করা সমভাবে সম্ভাব্য না হওয়াই স্বাভাবিক। তখন তার পাশের সম্ভাবনা $= \frac{\text{অনুকূল ঘটনার সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনার সংখ্যা}} = \frac{1}{2}$ বললে ভুল হবে।

পরিসংখ্যানগত (Statistical) বা **নিরীক্ষাগত** (Emperical) **সম্ভাবনা** ঃ নির্ধারিত সমজাতীয় পরিস্থিতিতে কোন পরীক্ষার ফল গ্রহণের পর যদি অসীম সংখ্যক মোট ঘটনার জন্য অনুকূল ঘটনা এবং মোট ঘটনার সীমা নেয়া যায় তবে এই সীমার মানই হবে পরিসংখ্যানগত বা নিরীক্ষাগত সম্ভাবনা অর্থাৎ $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$

উল্লেখ্য যে পরিসংখ্যানগত সম্ভাবনা ধ্রুপদী সম্ভাবনার যথার্থতা প্রমাণে সহায়ক যদিও এই দুই পদ্ধতিতে সম্ভাবনা পরিমাপ করলে তার মান একেবারে সমান হয় না। একটি উদাহরণ ব্যবহার করা যায় ঃ

দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের জনৈক যুদ্ধবন্দী জে. ই. কেরিচ তাঁর বন্দীশালায় সময় কাটানোর জন্য দশটি বিভিন্ন মুদ্রা নিয়ে প্রতিটিকে এক হাজার বার টস করে দেখেন যে, মুদ্রাগুলির সোজা পিঠ পাবার সংখ্যা একেকটির জন্য একেকটি হয়। দশটি মুদ্রার জন্য তার সোজা পিঠ পাবার সংখ্যা ছিল 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 520, 504 এবং 529 বার। মুদ্রাগুলির জন্য সোজা পিঠ পাবার অনুকূল ঘটনা এবং পরীক্ষার মোট ঘটনার সংখ্যার অনুপাত ভিন্ন ভিন্ন $\left[\frac{502}{1000}, \frac{511}{1000}, \frac{497}{1000}\right.$ ইত্যাদি$\left.\right]$ হলেও তা $\frac{1}{2}$ –এর কাছাকাছি। পরীক্ষার সংখ্যা অসীম হলে গড়ে এই সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$–এর খুবই কাছাকাছি হবে। আর ধ্রুপদী সম্ভাবনার পদ্ধতি অনুযায়ী সম্ভবনা $= \frac{1}{2}$ যা ইতিপূর্বেই আলোচিত হয়েছে।

তবে পরিসংখ্যানগত সম্ভাবনার সীমাবদ্ধতা এই যে অসীম সংখ্যক পরীক্ষা পরিচালনা সময়সাপেক্ষ, বস্তুত অসম্ভব। তদুপরি প্রতিবার পরীক্ষার সময় পরীক্ষার শর্তসমূহ যে হুবহু একই থাকবে তারও নিশ্চয়তা নেই।

স্বতঃসিদ্ধ সম্ভাবনা (Axiomatic probability) ঃ সম্ভাবনা পরিমাপের এই পদ্ধতিতে নমুনা পরিসর (sample space) একটি অতীব গুরুত্বপূর্ণ ধারণা। কোন পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল প্রকার ফলের সমাহারকেই নমুনা পরিসর বলে। নমুনা পরিসরে সন্নিবেশিত পরীক্ষার ফলসমূহ একেকটি উপাদান হিসেবে নমুনা বিন্দু (sample point) নামে অভিহিত। নমুনা পরিসর S এর মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যাকে N(S) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

একটি মুদ্রা টস করলে নমুনা পরিসর S হবে

$S = \{H, T\}$ এবং $N(S) = 2$

একত্রে তিনটি মুদ্রা টস করলে নমুনা পরিসর হবে

$S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T),$ (T, T, H) এবং $(T, T, T)\}$ এবং

$N(S) = 8$

স্বতঃসিদ্ধ সম্ভাবনা হচ্ছে অনুকূল ঘটনার সংখ্যা এবং নমুনা পরিসরের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যার অনুপাত। এই পদ্ধতিতে সম্ভাবনা নির্ণয়ের কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ আছে যেগুলি হচ্ছে ঃ

১. ঘটনাটির সম্ভাবনা বাস্তব এবং ঋণাত্মক নয় অর্থাৎ

$P(A) \geq 0$

২. সমগ্র নমুনা পরিসরের সম্ভাবনা 1 অর্থাৎ $P(S) = 1$

৩. A_1, A_2, A_3 ... ইত্যাদি পরস্পর নাকচকারী ঘটনা হলে

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

১২.১ একটি তাসের প্যাকেট থেকে যেকোন একটি তাস টেনে নিলে সেটি (ক) টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? (খ) হরতনের টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? (গ) হরতনের তাস হবার সম্ভাবনা কত? (ঘ) লাল তাস হবার সম্ভাবনা কত? (ঙ) ইস্কাপনের তাস না হবার সম্ভাবনা কত? (চ) রাজা না হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ

ক. মোট বিভিন্ন ঘটনার সংখ্যা $n = 52$; অনুকূল ঘটনার সংখ্যা $m = 4$ (যেহেতু টেক্কা চারটি)

$\therefore$ টেক্কা হবার সম্ভাবনা $= \frac{m}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

খ. $m = 52, n = 1$ (যেহেতু হরতনের টেক্কা মাত্র একটি)

$\therefore$ হরতনের টেক্কা হবার সম্ভাবনা $= \frac{1}{52}$

গ. $m = 52, n = 13$ (যেহেতু হরতনের তাস মোট 13টি)

$\therefore$ হরতনের তাস হবার সম্ভাবনা $= \frac{m}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

ঘ. $m = 52, n = 26$ (যেহেতু হরতনের ও রুইতনের মিলে লাল তাস মোট 26টি)।

$\therefore$ লাল তাস হবার সম্ভাবনা $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ঙ. ইস্কাপনের তাস হবার সম্ভাবনা $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ ইস্কাপনের তাস না হবার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

চ. রাজা হবার সম্ভাবনা $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$\therefore$ রাজা না হবার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

১২.২ একটি মুদ্রা নিয়ে টস করলে তার সদরপিঠ উপরের দিকে পড়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ $n = 2$ (যেহেতু মুদ্রার সব মিলিয়ে দুটি পিঠ)

$m = 1$

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

১২.৩ দুটি মুদ্রা নিয়ে একসঙ্গে টস করলে (ক) দুটিরই উল্টোপিঠ উপরে পড়ার সম্ভাবনা কত? (খ) মাত্র একটির উল্টোপিঠ উপরে পড়ার সম্ভাবনা কত? (গ) অন্তত একটির উল্টোপিঠ উপরে পড়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ

ক. প্রথম দুটি মুদ্রা একসঙ্গে টস করলে যেসব ঘটনা পাওয়া যাবে তাদের মোট সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে। ঘটনাগুলি হতে পারে,

১. প্রথম মুদ্রার সদর পিঠ, দ্বিতীয় মুদ্রার সদর পিঠ ;

২. প্রথমটির সদর, দ্বিতীয়টির উল্টো ;

৩. প্রথমটির উল্টো, দ্বিতীয়টির সদর ;

৪. প্রথমটির উল্টো, দ্বিতীয়টির উল্টো

অর্থাৎ মোট 4 টি ঘটনা বা $n = 4$

দুটির উল্টোপিঠ পড়ার ঘটনা $m = 1$

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$

খ. মোট ঘটনা $n = 4$; মাত্র একটির উল্টোপিঠ পড়ার ঘটনা $m = 2$ (২ এবং ৩–এ বর্ণিত ঘটনা)

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

গ. অন্তত একটির উল্টোপিঠ পড়ার ঘটনা = 3 (2, 3 এবং 4–এ বর্ণিত ঘটনা)। মোট ঘটনা = 4 $\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$

১২.৪ তিনটি বিভিন্ন মুদ্রা একসঙ্গে টস করলে অন্তত দুটির সদর পিঠ উপরে পড়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ তিনটি মুদ্রাকে একসঙ্গে টস করলে যতগুলি ঘটনা পাওয়া যাবে তাদের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য গণনার মৌলিক নিয়ম অনুসরণ করা যায়। মুদ্রার সংখ্যা 3, প্রতিটিরই পিঠের সংখ্যা 2 এবং এক সময়ে এক পিঠ যতগুলি মুদ্রা ততবার পর্যন্ত পুনরাবৃত হতে পারে। অতএব মোট বিন্যাসের সংখ্যা হবে

$2^3 = ৮$ (১২.৩ উদাহরণে বর্ণিত সদর ও উল্টোপিঠ পাবার সব ঘটনা লিখে ঘটনার মোট সংখ্যা যাচাই কর)

অন্তত দুটি মুদ্রার সদর পিঠ উপরে পড়ার মোট ঘটনার সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য সদরকে স এবং উল্টোপিঠকে উ লিখে সম্ভাব্য সব অবস্থাকে লিখলে সেগুলি হবে সসস, সউস, সসউ এবং উসস অর্থাৎ মোট 4টি।

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

১২.৫ একটি থলিতে লাল, নীল ও হলুদ তিন রং এর তিনটি বল আছে। থলি থেকে যেকোন একটি বল তুলে নিলে সেটি নীল না হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ মোট ঘটনার সংখ্যা = 3

বলটি নীল হবার ঘটনার সংখ্যা = 1

$\therefore$ নীল হবার সম্ভাবনা $= \frac{1}{3}$ এবং নীল না হবার সম্ভাবনা

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

১২.৬ একটি বাক্সে 4টি নীল বল এবং 5টি লাল বল আছে। বলগুলির দিকে না তাকিয়ে দুটি বল তুলে নিলে (ক) একটি লাল বল পাবার সম্ভাবনা কত? (খ) একটি লাল ও একটি নীল বল পাবার সম্ভাবনা কত? (গ) তিনটি বল নিলে দুটি নীল বল ও একটি লাল পাবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ

ক. মোট ঘটনার সংখ্যা $= {}^{4+5}c_2 = {}^9c_2 = 36$

একটি লাল বল পাবার ঘটনার সংখ্যা $= {}^5c_1 = 5$

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{5}{36}$

খ. মোট ঘটনার সংখ্যা = ${}^{4+5}c_2 = 36$

একটি লাল ও একটি নীলবল পাবার ঘটনার সংখ্যা = ${}^5c_1 \times {}^4c_1 = 20$

$\therefore$ সম্ভাবনা = $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

গ. মোট ঘটনার সংখ্যা = ${}^{4+5}c_3 = {}^9c_3 = 84$

দুটি নীল ও একটি লাল বল পাবার ঘটনার সংখ্যা = ${}^4c_2 \times {}^5c_1 = 30$

$\therefore$ সম্ভাবনা = $\frac{30}{84} = \frac{5}{14}$

১২.৭ 15 জন ছাত্র-ছাত্রীর একটি গ্রুপে বাণিজ্য অনুষদের ছাত্রছাত্রী আছে 5 জন। 15 জনের থেকে যেকোন 3 জনকে নিলে তারা সবাই বাণিজ্য অনুষদের হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ 15 জন থেকে 3 জন নেবার বিভিন্ন প্রকার মোট সমাবেশের সংখ্যা = ${}^{15}c_3 = 455$ এটিই হচ্ছে তিন জনকে নেয়ার মোট ঘটনার সংখ্যা। আবার অনুকূল ঘটনা অর্থাৎ 3 জনই বাণিজ্য অনুষদের হতে হলে তারা হবে বাণিজ্য অনুষদের 5 জনের থেকে এবং এটি হতে পারে ${}^5c_3$ উপায়ে, অর্থাৎ 3 জনই বাণিজ্য অনুষদের হবে এমন ঘটনার সংখ্যা = ${}^5c_3 = 10$

$\therefore$ সম্ভাবনা = $\frac{10}{455}$ বা $\frac{2}{91}$

১২.৮ একটি ঘড়ির দোকানে 20টি দেয়াল ঘড়ির মধ্যে দুটি ত্রুটিযুক্ত। পরীক্ষা না করেই যদি তিনটি ঘড়ি নেয়া হয় তবে ত্রুটিযুক্ত দুটি ঘড়িই পাবার সম্ভাবনা কত? একটি ত্রুটিযুক্ত হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ তিনটি ঘড়ি নেয়ার মোট ঘটনার সংখ্যা = ${}^{20}c_3 = 1140$

দুটি ত্রুটিযুক্ত ঘড়ির মধ্যে দুটিকে পাবার ঘটনা = ${}^2c_2 = 1$

$\therefore$ ত্রুটিযুক্ত দুটি ঘড়িই পাবার সম্ভাবনা = $\frac{1}{1140}$

আবার দুটি ত্রুটিযুক্ত ঘড়ির মধ্যে একটি পাবার ঘটনা = ${}^2c_1 = 2$

$\therefore$ একটি ত্রুটিযুক্ত ঘড়ি পাবার সম্ভাবনা = $\frac{2}{1140} = \frac{1}{570}$

সম্ভাবনার মৌলিক নিয়ম

দুটি ঘটনার একটি (A) ঘটনার সম্ভাবনা যদি P(A) এবং অপরটি (B) ঘটার সম্ভাবনা যদি P(B) হয় তবে তাদের মধ্যে যেকোন একটি ঘটার সম্ভাবনা অর্থাৎ A অথবা B ঘটার সম্ভাবনাকে $P(A \cup B)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। আবার তাদের দুটিই একসঙ্গে ঘটার সম্ভাবনাকে $P(A \cup B)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

এ নিয়মটিকে সম্ভাবনার মৌলিক নিয়ম বলে। তবে নিয়মটি ব্যবহারের ক্ষেত্রে ঘটনাসমূহের প্রকৃতি পরীক্ষা করা উচিত। যদি দুটি ঘটনা A এবং B এমন হয় যে তাদের একটি ঘটলে অপরটি ঘটবে না তবে তারা পরস্পর নাকচকারী (mutually exclusive) ঘটনা এবং তাদের ক্ষেত্রে $P(A \cap B) = 0$ (যেহেতু তারা একসংগে ঘটতে পারে না)। এমন ঘটনা জুটির জন্য $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

পরস্পর নাকচকারী ঘটনার সংখ্যা যত বেশিই হোক না কেন তাদের জন্য একইভাবে এই নিয়ম প্রয়োগ করা যায়। অর্থাৎ

$$P(A \cup B \cup C \cup D \ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + \ldots$$

১২.৯ একটি বাক্সে 7টি লাল, 5টি নীল, এবং 3টি সাদা বল আছে। বলগুলির দিকে না তাকিয়ে একটি বল তুলে নিলে সেটি লাল বা সাদা হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ ধরা যাক লাল বল ওঠার সম্ভাবনা = P(A),

নীল বল ওঠার সম্ভাবনা P(B) এবং সাদা বল ওঠার সম্ভাবনা = P(C)।

একবারে একটি বল তুললে মোট ঘটনার সংখ্যা = 15

লাল বল ওঠার মোট ঘটনার সংখ্যা = 7 $\therefore$ $P(A)\ \frac{7}{15}$

নীল বল ওঠার মোট ঘটনার সংখ্যা = 5 $\therefore$ $P(B) = \frac{5}{15}$

সাদা বল ওঠার মোট ঘটনার সংখ্যা = 3 $\therefore$ $P(C) = \frac{3}{15}$

একটি বল নিলে তা লাল ও সাদা হবার ঘটনা পরস্পর নাকচকারী। সুতরাং

$$P(A \text{ অথবা } C) = P(A) + P(C) = \frac{7}{15} + \frac{3}{15} = \frac{2}{3}$$

১২.১০ একটি প্যাকেট থেকে কোন একটি তাস নিলে সেটি টেক্কা বা রাজা হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ একটি তাস একই সঙ্গে টেক্কা ও রাজা হতে পারে না। অর্থাৎ টেক্কা ও রাজা হবার ঘটনা পরস্পর নাকচকারী। সেক্ষেত্রে তাসটি টেক্কা হবার ঘটনা A এবং রাজা হবার ঘটনা B হলে তার টেক্কা বা রাজা হবার সম্ভাবনা

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

এখন $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

এবং $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ $\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

১২.১১ একটি প্যাকেট থেকে যেকোন একটি তাস নিলে তার টেক্কা বা হরতন হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ একটি তাস একই সঙ্গে টেক্কা ও হরতন হতে পারে এবং তা ঘটবার সংখ্যা = 1 অর্থাৎ টেক্কা হবার ঘটনা A এবং হরতন হবার ঘটনা B হলে $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13};\ P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

১২.১২ একটি ছাত্রের বাণিজ্যিক গণিত পরীক্ষায় ফেল করার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$ বাণিজ্যিক গণিত এবং পরিসংখ্যান দুটিতেই পাশের সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$ এবং দুটির যেকোন একটিতে পাশের সম্ভাবনা $\frac{7}{8}$ হলে তার পরিসংখ্যানে পাশের সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ বাণিজ্যিক গণিতে পাশের সম্ভাবনা $P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

পরিসংখ্যানে পাশের সম্ভাবনা $(P(B) = ?$

বাণিজ্যিক গণিত ও পরিসংখ্যানের যে কোন একটিতে

পাশের সম্ভাবনা $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$

সূত্রানুসারে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

বা, $\frac{7}{8} = \frac{4}{5} + P(B) - \frac{3}{4}$

$\therefore \quad P(B) = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = \frac{33}{40}$

সম্ভাবনার পূরণের নিয়ম :

দুটি ঘটনা A এবং B-এর একটি অপরটির উপর নির্ভরশীল হলে অর্থাৎ একটি (A) ঘটার সম্ভাবনা অপরটি (B) ঘটা কিংবা না ঘটার উপর নির্ভর করলে ঘটনা দুটি একই সঙ্গে অথবা পরপর ঘটার সম্ভাবনা

$P(A \cap B) = P(A).\, P(B \mid A)$ এবং

$P(B \cap A) = P(B).\, P(A \mid B)$

এখানে $P(B \mid A)$ – হচ্ছে A ঘটনাটি ঘটে যাবার পর B ঘটার সম্ভাবনা এবং $P(A \mid B)$ হচ্ছে B ঘটনাটি ঘটে যাবার পর A ঘটার সম্ভাবনা। তবে দুটি ঘটনা A এবং B একে অপরের উপর নির্ভরশীল না হলে

$P(A \cap B) = P(A).\, P(B)$

সম্ভাবনার এই নিয়মকে সম্ভাবনার পূরণের নিয়ম বলে।

কোন ঘটনা A-এর ঘটা বা না ঘটা যদি অপর কোন ঘটনা B-এর ঘটা বা না ঘটাকে প্রভাবিত না করে তবে

$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$ অর্থাৎ

A এবং B-এর যেকোন একটি ঘটার সম্ভাবনা

= 1 – (A কিংবা B কোনটিই না ঘটার সম্ভাবনা)

এবং যেহেতু A এবং B একে অপরের উপর নির্ভরশীল নয়

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}).\, P(\bar{B}) \quad \therefore P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}).\, P(\bar{B})$

সম্ভাবনার পূরণের নিয়মকে দুয়ের অধিক (পরস্পর নির্ভরশীল নয় এমন) ঘটনার জন্য নিম্নোক্ত উপায়ে লেখা যায় :

$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A}).\, P(\bar{B}).\, P(\bar{C})$

১২.১৩ একটি বাক্সে 4টি লাল এবং 6টি নীল বল আছে; অপর একটি বাক্সে 6টি লাল এবং 7টি নীল বল আছে। প্রত্যেক বাক্স থেকে একটি করে বল নিলে দুটি লাল বল পাবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ দুটি বাক্স থেকে একটি করে লাল বল পাবার ঘটনা একে অপরের উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব অনুকূল ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা হবে

প্রথম বাক্স থেকে একটি লাল বল পাবার সম্ভাবনা) × (দ্বিতীয় বাক্স থেকে একটি লাল বল পাবার সম্ভাবনা) $= \frac{4}{10} \times \frac{6}{13} = \frac{12}{65}$

১২.১৪ ফিন্যান্সে মাস্টার ডিগ্রি প্রাপ্ত একজন যুবকের ব্যাংক কর্মচারী হবার সম্ভাবনা .6 এবং একজন ব্যাংক কর্মচারির মাসিক বেতন 2400 টাকা হবার সম্ভাবনা .4। একজন ব্যাংক কর্মচারীর ফিন্যান্সে মাস্টার ডিগ্রি থাকা কিংবা মাসিক বেতন 2400 টাকা হবার সম্ভাবনা .7। ফিন্যান্সে মাস্টার ডিগ্রিপ্রাপ্ত একজন যুবক ব্যাংকে চাকরী নিলে তার মাসিক বেতন 2400 টাকা হবার সম্ভাবনা .7। ফিন্যান্সে মাস্টার ডিগ্রিপ্রাপ্ত একজন যুবক ব্যাংকে চাকরী নিলে তার মাসিক বেতন 2400 টাকা হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ ধরা যাক, ফিন্যান্সে মাস্টার ডিগ্রি প্রাপ্ত একজন যুবকের ব্যাংকে চাকরি গ্রহণের ঘটনা = A

একজন ব্যাংক কর্মচারির মাসিক বেতন 2400 টাকা হবার ঘটনা = B সেক্ষেত্রে, ফিন্যান্সে মাস্টার ডিগ্রি প্রাপ্ত ব্যাংক কর্মচারির মাসিক বেতন 2400 টাকা হবার ঘটনা = B/A

দেয়া আছে, $P(A \cup B) = .7$ অর্থাৎ

বা, $.6 + .4 - P(A \cap B) = .7 \quad \therefore \; P(A \cap B) = .3$

কিন্তু $P(A \cap B) = P(A).\,P(B/A)$

বা, $.3 = .6\,P(B/A) \quad \therefore \; P(B/A) = \frac{.3}{.6} = \frac{1}{2}$

১২.১৫ একটি জুতা শিল্প প্রকল্প আর্থিক সহায়তা পাবার জন্য তিনটি সংস্থার বিবেচনাধীন রয়েছে। নির্দিষ্ট প্রকল্পের জন্য মাত্র একটি সংস্থা থেকে ঋণ নেয়া গেলে এবং সংস্থা তিনটির প্রথমটিতে তিনটি, দ্বিতীয়টিতে চারটি এবং তৃতীয়টিতে দুটি প্রকল্প

বিবেচনাধীন থাকলে জুতা শিল্প প্রকল্পটির যেকোন একটি সংস্থা থেকে আর্থিক সহায়তা প্রাপ্তির সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ ধরা যাক A = প্রথম সংস্থা থেকে সহায়তা পাবার ঘটনা

B = দ্বিতীয় সংস্থা থেকে সহায়তা পাবার ঘটনা

C = তৃতীয় সংস্থা থেকে সহায়তা পাবার ঘটনা

$$P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{1}{4},\ P(C) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ P(\overline{A}) = \frac{2}{3},\ P(\overline{B}) = \frac{3}{4};\ P(\overline{C}) \frac{1}{2}$$

প্রকল্পটির কোন সংস্থা থেকেই সাহায্য না পাবার সম্ভাবনা $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

$\therefore$ যেকোন একটি থেকে সহায়তা পাবার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

১২.১৬ একটি গ্রুপে 6 জন ছাত্র এবং 4 জন ছাত্রী আছে। অপর একটি গ্রুপে 5 জন ছাত্র এবং 6 জন ছাত্রী আছে। তাদের গ্রুপভিত্তিক তালিকায় শুধু ক্রমিক নং থাকায় তা দেখে ছাত্র বা ছাত্রী কাউকে নির্দিষ্ট করে চেনা সম্ভব নয়। তালিকাটির যেকোন গ্রুপের ক্রমিক নং দেখে দুজনকে বেছে নিলে তাদের একজন ছাত্র ও একজন ছাত্রী হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ দুটি ক্রমিক নং পরস্পর পৃথক দুটি উপায়ে বেছে নেয়া যায় ঃ

ক. প্রথম গ্রুপ থেকে দুটি ক্রমিক নং নেয়া (ঘটনা A) এবং

খ. দ্বিতীয় গ্রুপ থেকে দুটি ক্রমিক নং নেয়া (ঘটনা B)

$$\therefore\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

কিন্তু A ঘটনা একটি যৌগিক (Compound) ঘটনা যার একটি অংশ হচ্ছে প্রথম গ্রুপটিকেই নেয়া এবং তার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$ (যেহেতু গ্রুপের সংখ্যা 2) এবং অপর অংশ হচ্ছে 6 জন ছাত্র ও 4 জন ছাত্রীর মধ্যে 1 জন ছাত্র ও 1 জন ছাত্রী নেয়া আর তার সম্ভাবনা হচ্ছে $\frac{{}^6c_1 \times {}^4c_1}{{}^{10}c_2}$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{{}^6c_1 \times {}^4c_1}{{}^{10}c_2} = \frac{4}{15}$$

অনুরূপভাবে $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{{}^5c_1 \times {}^6c_1}{{}^{11}c_2} = \frac{3}{11}$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{4}{15} + \frac{3}{11} = \frac{44+45}{165} = \frac{89}{165}$$

কাঙ্ক্ষিত মান (Expected value)

কোন একটি চলক Y–এর নির্দিষ্ট মান জানা না থাকলেও তার বিভিন্ন মান হবার সম্ভাবনার সাহায্যে তার একটি আনুমানিক মান নির্ণয় সম্ভব। বিভিন্ন মান হবার সম্ভাবনার সাহায্যে নির্ধারিত এই আনুমানিক মানকেই চলকের কাঙ্ক্ষিত মান বলে। যেমন, Y–এর মান Y_1 হবার সম্ভাবনা P_1, Y_2 হবার সম্ভাবনা P_2, Y_3 হবার সম্ভাবনা P_3 ইত্যাদি হলে Y-এর আনুমানিক বা কাঙ্ক্ষিত মান $E(Y) = y_1p_1 + y_2p_2 + y_3p_3 + \cdots \cdots + y_np_n$

$$\text{বা, } E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_ip_i$$

কাঙ্ক্ষিত মানের কয়েকটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য আছে। এগুলি হচ্ছে ঃ

ক. কোন ধ্রুবের কাঙ্ক্ষিত মান ধ্রুবটিরই সমান অর্থাৎ $E(C) = C$

খ. কোন ধ্রুব ও কোন চলকের গুণফলের কাঙ্ক্ষিত মান ধ্রুবটির এবং চলকটির কাঙ্ক্ষিত মানের গুণফলের সমান অর্থাৎ $E(CY) = CE(Y)$

গ. দুটি চলকের যোগফল বা বিয়োগফলের কাঙ্ক্ষিত মান চলকদ্বয়ের উভয়ের কাঙ্ক্ষিত মানের যোগফল বা বিয়োগফলের সমান অর্থাৎ $E(Y \pm X) = E(Y) \pm E(X)$

ঘ. দুটি পরস্পর স্বাধীন চলকের গুণফলের কাঙ্ক্ষিত মান চলকদ্বয়ের কাঙ্ক্ষিত মানের গুণফলের সমান অর্থাৎ $E(Y.X) = E(Y).E(X)$

ঙ. কোন চলকের মান এবং তার কাঙ্ক্ষিত মানের পার্থক্যের কাঙ্ক্ষিত মান 0 অর্থাৎ $E[Y - E(Y)] = 0$

বাণিজ্যিক গণিতে কাঙ্ক্ষিত মানের ব্যবহার ব্যাপক। কটি উদাহরণের সাহায্যে তা বুঝানো হল।

১২.১৭ একটি ঘড়ির দোকানীর অভিজ্ঞতা অনুযায়ী তার দৈনিক বিভিন্ন সংখ্যক ঘড়ি বিক্রির সম্ভাবনা নিম্নরূপ ঃ

বিক্রীত ঘড়ির সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
সম্ভাবনা	.01	.05	.1	.25	.36	.24	.12	.1	.08	.05

ঐ দোকানীর দৈনিক গড় ঘড়ি বিক্রির সংখ্যা কত?

সমাধান ঃ কাঙ্ক্ষিত মানের সূত্রানুযায়ী দৈনিক গড় বিক্রি (N)–এর মান

$$E(N) = 0 \times .01 + 1 \times .05 + 2 \times .1 + 3 \times .25 + 4 \times .36 + 5 \times .24 + 6 \times .12 + 7 \times .1 + 8 \times .08 + 9 \times .05$$

$$= 0 + .05 + .2 + .75 + 1.44 + 1.2 + .72 + .7 + .64 + .45$$

$$= 6.15$$

১২.১৮ একটি আসবাবপত্র তৈরির কারখানায় প্রস্তুত স্টীলের আলমারির দৈনিক চাহিদাসূচী দেয়া হল ঃ

দৈনিক চাহিদা	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	.02	.06	.1	.13	.18	.17	.11	.04	.01

কারখানাটির আলমারির দৈনিক গড় চাহিদা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দৈনিক গড় চাহিদা Y হলে

$$E(Y) = 0 \times .02 + 1 \times .06 + 2 \times .1 + 3 \times .13 + 4 \times .18 + 5 \times .17 + 6 \times .11 + 7 \times .04 + 8 \times .01$$

$$= .06 + .2 + .39 + .72 + .85 + .66 + .28 \times .08$$

$$= 3.24$$

১২.১৯ একটি নির্মাণ প্রতিষ্ঠান তিনটি কাজের জন্য দরপত্র জমা দিতে পারে। প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় কাজ থেকে সম্ভাব্য মুনাফার পরিমাণ যথাক্রমে 50000, 75000 এবং 90000 টাকা। আবার সেগুলির জন্য দরপত্র প্রস্তুতকরণের এবং আনুষঙ্গিক অন্যান্য কাজের প্রাথমিক ব্যয় যথাক্রমে 7000, 10000 এবং 12000 টাকা যার সবটাই চুক্তি

স্বাক্ষরিত না হলে প্রতিষ্ঠানের জন্য লোকসান। কাজ তিনটি পাবার সম্ভাবনা যথাক্রমে .5, .4 এবং .3 হলে প্রতিষ্ঠানটির জন্য কোন কাজের চেষ্টা করা সবচেয়ে লাভজনক?

সমাধান ঃ কাজ তিনটির জন্য পাবার সম্ভাবনা এবং আর্থিক লাভ / লোকসানের একটি তালিকা তৈরি করলে তা নিম্নরূপ হবে ঃ

ঘটনা	প্রথম কাজ		দ্বিতীয় কাজ		তৃতীয় কাজ	
	সম্ভাবনা	লাভ/ লোকসান	সম্ভাবনা	লাভ/ লোকসান	সম্ভাবনা	লাভ/ লোকসান
কাজ পাওয়া	.5	+ 50000	.4	+ 75000	.3	+ 90000
কাজ না পাওয়া	.5	– 7000	.6	– 10000	.7	– 12000

প্রথম কাজের জন্য গড় আর্থিক লাভ/লোকসান $= 50000 \times .5 - 7000 \times .5$

$= + 21500$

দ্বিতীয় কাজের জন্য গড় আর্থিক লাভ/লোকসান $= 75000 \times .4 - 10000 \times .6$

$= + 24000$

তৃতীয় কাজের জন্য গড় আর্থিক লাভ/লোকসান $= 90000 \times .3 - 12000 \times .7$

$= + 18600$

অতএব লাভের দিক থেকে প্রতিষ্ঠানটির দ্বিতীয় কাজের জন্য চেষ্টা করা উচিত।

অনুশীলনী — ১২

১. সম্ভাবনা বলতে কি বোঝায়? অনুকূল ও প্রতিকূল ঘটনা কি উদাহরণসহ বুঝিয়ে দাও।

২. পরস্পর নাকচকারী এবং একে অপরের উপর নির্ভরশীল নয় এমন ঘটনার দুটি করে উদাহরণ দাও। দুটি ঘটনা পরস্পর নাকচকারী হলে তারা একে অপরের উপর নির্ভরশীল হতে পারে কি?

৩. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ধারণের উপায়সমূহ বর্ণনা কর ঃ

(ক) পরস্পর নাকচকারী ঘটনা (খ) একে অপরের উপর নির্ভরশীল ঘটনা (গ) একে অপরের উপর নির্ভরশীল নয় এমন ঘটনা।

৪. সম্ভাবনার মৌলিক নিয়ম কি? উদাহরণসহ বুঝাও।

৫. সম্ভাবনার পূরণের নিয়ম কি? উদাহরণসহ বুঝাও।

৬. কাঙ্ক্ষিত মান কাকে বলে? বাণিজ্যশাস্ত্রে কাঙ্ক্ষিত মানের গুরুত্ব ব্যাখ্যা কর।

৭. একটি থলিতে 4টি সাদা এবং 6টি কালো বল আছে। থলি থেকে দুটি বল তুলে নিলে তাদের একটি সাদা ও অপরটি কালো হবার সম্ভাবনা কত? দুটিই সাদা হবার সম্ভাবনা কত?

৮. একজন ছাত্রের একটি অংক সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$ এবং অপর একটি সমাধানে ব্যর্থ হবার সম্ভাবনা $\frac{4}{5}$। তার অন্তত একটি সমাধানের সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ হলে তার দুটি অংকেই সমাধানের সম্ভাবনা কত?

৯. একটি চালানের 20টি রেডিও সেটের মধ্যে 4টি ত্রুটিপূর্ণ। তাদের থেকে যেকোন 3টি বেছে নিলে একটি ত্রুটিপূর্ণ সেট পাবার সম্ভাবনা কত?

১০. একটি যন্ত্রের তিনটি অংশের যখন সবকটি অংশ ঠিকমতো কাজ করে তখনই যন্ত্রটি চালু করা যেতে পারে। এক বছর সময়ের মধ্যে যন্ত্রটির একটি অংশ বিকল হবার সম্ভাবনা .2, অপর একটি বিকল হবার সম্ভাবনা .15 এবং তৃতীয় অংশটি বিকল হবার সম্ভাবনা .1 হলে এক বছরে যন্ত্রটি অকেজো হয়ে যাবার সম্ভাবনা কত?

১১. কিছু সংখ্যক ব্যক্তিকে বিভিন্ন বয়সসীমার গ্রুপে ভাগ করে নিচের তালিকাটি পাওয়া গেল ঃ

বয়স (বছর)	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70
ব্যক্তির সংখ্যা	5	8	9	7	8

উক্ত ব্যক্তিদের যেকোন একজনকে বেছে নিলে তার মধ্যবয়সী হবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যবয়সী বলতে বয়স 31 – 40 বছর বুঝানো হল)। 3 জনকে বেছে নিলে তাদের একজন যুবক হবার সম্ভাবনা কত?

১২. একটি কারখানা সম্প্রসারণের জন্য আগামী এক বছরে অতিরিক্ত বিভিন্ন পরিমাণ পুজি (লক্ষ টাকা) বিনিয়োগের সম্ভাবনা নিম্নরূপ ঃ

পুঁজির পরিমাণ	1 – 1.5	1.6 – 2	2.1 – 2.5	2.6 – 3	3.1 – 3.5
সম্ভাবনা	.1	.15	.3	.3	.1

আগামী এক বছরে কারখানাটির সম্প্রসারণে অন্তত 1.6 লক্ষ টাকা তবে 3 লক্ষ টাকার বেশি নয় এমন পরিমাণ পুঁজি বিনিয়োগের সম্ভাবনা কত?

১৩. কোন একটি শহরের 100 জন স্বল্প পুঁজির উদ্যোক্তাদের (entrepreneurs) ব্যবসায় টিকে থাকার মেয়াদ সম্পর্কে নিচের তথ্যসমূহ দেয়া আছে ঃ

মেয়াদ (বছর)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 –
উদ্যোক্তাদের সংখ্যা	55	15	10	8	6	6

ঐ শহরে একজন উদ্যোক্তার ব্যবসা শুরুর পাঁচ বছরের মধ্যে ব্যবসা বন্ধ হয়ে যাবার সম্ভাবনা কত?

১৪. কোন বাণিজ্য সম্মেলনে 4 সদস্যের প্রতিনিধিদল তৈরির জন্য প্রাথমিকভাবে 4 জন পাট ব্যবসায়ী, 3 জন চামড়া ব্যবসায়ী, 3 জন চিংড়ি রপ্তানিকারক এবং 2 জন অর্থনীতিবিদকে নির্বাচন করা হল। প্রতিনিধিদলে

ক. প্রত্যেক গ্রুপের একজন করে থাকার সম্ভাবনা কত?

খ. অন্তত একজন অর্থনীতিবিদ থাকার সম্ভাবনা কত?

১৫. বিশ্ববিদ্যালয়ের একটি বিভাগের প্রথম বর্ষ সম্মান শ্রেণীতে অতিরিক্ত দুজনকে ভর্তি করা হবে বলে ঘোষণা দিলে সমান যোগ্যতার 14 জন্য ছাত্র এবং 6 জন ছাত্রী আবেদন করে। লটারির মাধ্যমে দুজনকে ভর্তির জন্য নির্বাচিত করা হলে তাদের ক) দুজনই ছাত্রী হবার সম্ভাবনা কত? খ) অন্তত একজন ছাত্রী হবার এবং গ) একজন ছাত্রী না হবার সম্ভাবনা কত?

১৬. একজন বিক্রেতা দুজন ক্রেতার প্রত্যেকের নিকট একটি পণ্য বিক্রি করার শতকরা ৪০ ভাগ সম্ভাবনা রাখে। পছন্দের প্রশ্নে ক্রেতাদ্বয়ের একজন অপর জনের উপর নির্ভরশীল না হলে বিক্রেতার জন্য ক্রেতাদ্বয়ের যেকোন একজনের নিকট পণ্যটি বিক্রয়ের সম্ভাবনা কত?

১৭. একটি প্রকল্পের আয়ুষ্কাল 25 বছর হবার সম্ভাবনা .5 এবং অপর একটি প্রকল্পের আয়ুষ্কাল 25 বছর হবার সম্ভাবনা .3 হলে দুটি প্রকল্পেরই আয়ুষ্কাল 25 বছর হবার সম্ভাবনা কত?

১৮. কোন ব্যবসায় মাসিক 3000 টাকা আয়ের সম্ভাবনা .5 অথবা মাসিক 1000 টাকা লোকসানের সম্ভাবনা .7 হলে কাঙ্ক্ষিত মুনাফার পরিমাণ কত?

১৯. একটি মার্কার সেলাই কলের মাসিক চাহিদার বিভিন্ন পরিমাণ ও তাদের সম্ভাবনা নিম্নরূপ

চাহিদা (একক)	1	2	3	4	5	6
সম্ভাবনা	.1	.15	.2	.25	.18	.12

সেলাই কলটির মাসিক কাঙ্ক্ষিত চাহিদা নির্ধারণ কর। উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $C = 4500 + 400\,n$ (n – উৎপাদিত কলের সংখ্যা) হলে মাসিক চাহিদা পূরণের জন্য মোট উৎপাদন ব্যয় কত?

২০. তিন জন ছাত্রের পরীক্ষার খাতায় প্রতি পৃষ্ঠায় একটি করে ভুল তথ্য লেখার সম্ভাবনা যথাক্রমে .2, .25 এবং .4। তারা যথাক্রমে 10,16 এবং 20 পৃষ্ঠা লিখলে তিনজনের মোট নির্ভুল তথ্য সংবলিত পৃষ্ঠার সংখ্যা কত?

ত্রয়োদশ অধ্যায়

ম্যাট্রিক্স বীজগণিত

[MATRIX ALGEBRA]

সারি এবং স্তম্ভে নির্ধারিত পদ্ধতিতে উপস্থাপিত বিভিন্ন সংখ্যার সমাহারকে ম্যাট্রিক্স বলে। ধরা যাক, তিনটি দেশ একই রকম চারটি পণ্যের বিভিন্ন পরিমাণ আমদানি করে। দেশ তিনটিকে A, B এবং C দ্বারা এবং পণ্য চারটিকে P, Q, R এবং S দ্বারা চিহ্নিত করলে তাদের আমদানি তালিকা নিম্নরূপ হবে

	P	Q	R	S
A	P_1	Q_1	R_1	S_1
B	P_2	Q_2	R_2	S_2
C	P_3	Q_3	R_3	S_3

তালিকায় Q_1 দ্বারা A দেশ কর্তৃক Q পণ্যের আমদানির পরিমাণ R_3 দ্বারা C দেশ কর্তৃক R পণ্যের আমদানির পরিমাণ ইত্যাদি বুঝায়। এখন আমদানির পরিমাণসমূহ যদি সারি ও স্তম্ভে আলাদভাবে উপস্থাপন করা হয় তবে নিচের বিবৃতিটি পাওয়া যাবে

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \end{vmatrix}$$

এভাবে উপস্থাপিত গাণিতিক বিবৃতিকেই ম্যাট্রিক্স বলে।

ধরা যাক তিনটি চলক x, y এবং z–এর জন্য তিনটি সমীকরণ দেয়া আছে ঃ

$$2x - y = z + 7$$
$$y = x + 5$$
$$2x - y - 2z = -4$$

সমীকরণ তিনটির সহগসহ চলকসমূহকে এক পাশে এবং ধ্রুব মানসমূহ অপর পাশে নিলে সেগুলিকে এভাবে লেখা যায় ঃ

$$2x - y - z = 7$$
$$-x + y = 5$$
$$2x - y - 2z = -4$$

এখন যদি চলকসমূহের সহগগুলিকে নিয়ে ম্যাট্রিক্স তৈরি করা হয় তবে তা হবে

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

আবার, ধ্রুব মানসমূহের ম্যাট্রিক্স হবে $\begin{vmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{vmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের শৃঙ্খলা ও উপাদান ঃ

সারি ও স্তম্ভের সংখ্যা দ্বারা কোন ম্যাট্রিক্সের শৃঙ্খলা (order) নির্ধারিত হয়। একটি ম্যাট্রিক্সে m–সংখ্যক সারি এবং n সংখ্যক স্তম্ভ থাকলে তার শৃঙ্খলা হবে $m \times n$। যেমন,

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির শৃঙ্খলা 2×3 এবং তাকে লেখা হয়

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{2\times 3}$; এভাবে, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}_{3\times 2}$ কিংবা $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{1\times 3}$ ইত্যাদি

ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি সারির প্রতিটি স্তম্ভের সংখ্যাকে একেকটি উপাদান (element) বলে।

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{2\times 3}$ ম্যাট্রিক্সের 4 হচ্ছে প্রথম সারির দ্বিতীয় স্তম্ভের উপাদান, 0 হচ্ছে দ্বিতীয় সারির তৃতীয় স্তম্ভের উপাদান ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, কোন ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ইত্যাদি স্তম্ভের উপাদান যথাক্রমে $a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots a_{1n}$ (যেখানে n মোট স্তম্ভের সংখ্যা) এবং প্রথম স্তম্ভে উপর থেকে নিচ বরাবর প্রতি সারির উপাদান সমূহ যথাক্রমে $a_{11}, a_{21}, a_{31} \dots a_{m1}$ (m — মোট সারির সংখ্যা) হলে ম্যাট্রিক্সটি নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা হয়।

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}_{m\times n}$$

লক্ষণীয় যে ম্যাট্রিক্সকে সাধারণত একটি বড় হাতের অক্ষর দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। প্রদত্ত সাধারণ ম্যাট্রিক্স A–এর সাধারণ উপাদান a_{ij} যেখানে

$$i = 1, 2, 3 \ldots m$$
$$j = 1, 2, 3 \ldots n$$

এবং এই সাধারণ ম্যাট্রিক্সকে সংক্ষেপে $A = |a_{ij}|_{m \times n}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ

সারি ম্যাট্রিক্স (Row matrix) ঃ কোন ম্যাট্রিক্স একটি মাত্র সারি দিয়ে গঠিত হলে সারি ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন $|5 \ \ 7 \ — 3|$, $|4 \qquad 3|$, বা সাধারণভাবে $|a_{11} \ \ a_{12} \ldots \ldots a_{1n}|_{1 \times n}$

স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (Column matrix) ঃ কোন ম্যাট্রিক্স একটি মাত্র স্তম্ভ দিয়ে গঠিত হলে তাকে স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন $\begin{vmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$

বা সাধারণভাবে $\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{vmatrix}_{m \times 1}$

বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square matrix) ঃ কোন ম্যাট্রিক্সের সারি এবং স্তম্ভের সংখ্যা সমান হলে তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \text{ বা সাধারণভাবে, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

সাধারণভাবে প্রকাশিত বর্গ ম্যাট্রিক্সটিকে সংক্ষেপে $A = |a_{ij}|_{n \times n}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

বর্গ ম্যাট্রিক্সে এমন কতগুলি উপাদান থাকে যাদের প্রত্যেকের জন্য সারি এবং স্তম্ভের নম্বর সমান অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান a_{ij} হলে এসকল উপাদানের ক্ষেত্রে $i = j$

বা তারা $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$। বর্গ ম্যাট্রিক্সের এসকল উপাদানকে আড়াআড়ি উপাদান (diagonal element) বলে।

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & -7 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}_{4 \times 4}$$

ম্যাট্রিক্সের আড়াআড়ি উপাদানগুলি হচ্ছে 5, 1, – 7, 5। কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রথম উপাদান থেকে শেষ সারির শেষ উপাদান পর্যন্ত কাল্পনিক রেখা টানলে তার উপরে অবস্থিত সকল উপাদানই হবে ম্যাট্রিক্সটির আড়াআড়ি উপাদান।

আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্স (Diagonal matrix) ঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের আড়াআড়ি উপাদানসমূহ ব্যতীত অন্য সকল উপাদান যদি শূন্য হয় তবে তাকে আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্স বলে। আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্সের সাধারণ বৈশিষ্ট্য হচ্ছে তার উপাদান a_{ij}–এর জন্য i এবং j–এর সকল মানের ক্ষেত্রে যখন $i \neq j$, $a_{ij} = 0$। আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্সের দুটি বিশেষ প্রকরণ হচ্ছে **স্কেলার ম্যাট্রিক্স** (scalar matrix) এবং **একক ম্যাট্রিক্স** (Identity matrix বা Unit matrix)। আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্সের আড়াআড়ি উপাদানসমূহ প্রত্যেকে যদি একে অপরের সমান হয় তবে তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে। স্কেলার ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান a_{ij}–এর জন্য i ও j এর সকল মানের ক্ষেত্রে যখন $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ এবং যখন $i = j$, $a_{ij} = \lambda$ (একটি নির্দিষ্ট মান)। আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্সের আড়াআড়ি উপাদানসমূহের প্রত্যেকে যদি 1 হয় তবে তাকে একক ম্যাট্রিক্স বলে। একক ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান a_{ij}–এর জন্য i ও j–এর সকল মানের ক্ষেত্রে যখন $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ এবং যখন $i = j$, $a_{ij} = 1$। নিচে আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্স ও তার বিশেষ প্রকরণদ্বয়ের একটি একটি করে উদাহরণ দেয়া হল ঃ

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্স স্কেলার ম্যাট্রিক্স একক ম্যাট্রিক্স

আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্সকে সাধারণভাবে $A = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, ...\, a_{nn})$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero বা Null matrix) ঃ কোন ম্যাট্রিক্সের সকল উপাদানই শূন্য হলে তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলে।

ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্স (Triangular matrix) ; কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের আড়াআড়ি উপাদানসমূহের নিচের সকল দিকের সকল উপাদান যদি শূন্য হয় তবে তাকে উপরের অংশে ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্সের (upper traingular matrix) বলে এবং বর্গ ম্যাট্রিক্সের আড়াআড়ি উপাদানসমূহের উপরের দিকের সকল উপাদান যদি শূন্য হয় তবে তাকে নিচের অংশে ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্স (Lower triangular matrix) বলে। উদাহরণ ;

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

উপরের অংশে ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্স   নিচের অংশে ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্স

উপরের অংশে ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান a_{ij}–এর জন্য যখন $i > j$, $a_{ij} = 0$ কিন্তু নিচের অংশে ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্সের জন্য $a_{ij} = 0$ যখন $i < j$।

ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ (Transpose of a matrix)

কোন ম্যাট্রিক্সের সারি এবং স্তম্ভ একে অপরের সঙ্গে স্থানান্তরিত করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় সেটিই হচ্ছে সে ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ। A ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপকে A' বা A^t দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যেমন,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}_{3\times 2} \text{ হলে } A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}_{2\times 3}$$

লক্ষণীয় যে কোন ম্যাট্রিক্স A–এর শৃঙ্খলা $m \times n$ হলে তার ক্রমান্তরিত রূপ A' এর শৃঙ্খলা হবে $n \times m$ এবং A এর সাধারণ উপাদান a_{ij} হলে A' এর সাধারণ উপাদান হবে a_{ji} অর্থাৎ

$$A = |a_{ij}|_{mxn} \text{ হলে } A' = |a_{ji}|_{nxm}$$

ক) কোন ম্যাট্রিক্সের সারি হবে তার ক্রমান্তরিত রূপের স্তম্ভ এবং ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ হবে তার ক্রমান্তরিত রূপের সারি ;

খ) A', A এর ক্রমান্তরিত রূপ হলে $(A')' = A$

গ) A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ যথাক্রমে A' এবং B' হলে $(A + B)' = A' + B'$ এবং

ঘ) $(A.B)' = B'.A'$, $(B.A)' = A'.B'$

(বৈশিষ্ট্য গ–এ উল্লিখিত ম্যাট্রিক্সের যোজন ও পূরণ প্রক্রিয়া এবং বৈশিষ্ট্য খ ও গ এ উল্লিখিত ম্যাট্রিক্স সমূহের সমতা অল্প কিছু পরই আলোচিত হবে)।

প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric matrix)

কোন একটি ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ যদি ম্যাট্রিক্সটির সমান হয় তবে ম্যাট্রিক্সটি কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$$ **একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স, কেন না** $A' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = A$

একইভাবে, $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। লক্ষ্যণীয় যে শুধুমাত্র বর্গ ম্যাট্রিক্সই প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হতে পারে এবং প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য $a_{ij} = a_{ji}$

কোন ম্যাট্রিক্সের উপাদানসমূহ যদি এমন হয় যে i এবং j এর সকল মানের জন্য $a_{ij} = -a_{ji}$ তবে সে ধরনের ম্যাট্রিক্সকে বিচ্যুত প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (skew symmetric matrix) বলে। যেমন

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$ একটি বিচ্যুত প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

দুটি ম্যাট্রিক্সের সমতা

A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্স পরস্পরের সমান হবে যদি তারা উভয়ে একই শৃঙ্খলার হয় এবং i ও j–এর সকল মানের জন্য A–এর সাধারণ উপাদান a_{ij}, B এর সাধারণ উপাদান b_{ij}–এর সমান হয়। অন্য কথায়, A এবং B–এর একটির কোন সারির কোন স্তম্ভের উপাদান যদি অপরটির একই সারির একই স্তম্ভের উপাদানের সমান বা উভয়ের সকল উপাদান ক্রমানুসারে পরস্পরের সমান হয় তবে $A = B$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} \text{ এবং } B = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{হলে } A = B$$

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad Y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \text{ এবং } Z = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{হলে}$$

$X \neq Y,\ Y \neq Z$ এবং $X \neq Z$

আবার যদি $A = \begin{vmatrix} x+y & z \\ 1 & x-y \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

এবং $A = B$ হয় তবে $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ z &= 2 \\ x - y &= 7 \end{aligned}$ যেখান থেকে $\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= -2, \\ z &= 2 \end{aligned}$

ম্যাট্রিক্সের যোজন ও বিয়োজন

দুটি ম্যাট্রিক্স A এবং B–এর যোজন বা বিয়োজন সম্ভব শুধু তখনই যখন তারা উভয়েই একই শৃঙ্খলার হয় এবং সেক্ষেত্রে A এবং B ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যোগফল হবে একটি তৃতীয় ম্যাট্রিক্স $C = A + B$ অথবা $C = A - B$; A ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান a_{ij} এবং B ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান b_{ij} হলে $A + B = C$ ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান c_{ij} হবে $a_{ij} + b_{ij}$ আর

$A - B = C$ ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান c_{ij} হবে $a_{ij} - b_{ij}$ ।

উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি বুঝানো হল :

ধরা যাক, $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$ এবং $B = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

সেক্ষেত্রে $A + B = C = \begin{vmatrix} 2 + (-3) & 0 + 6 \\ -5 + 4 & 6 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6. \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

এবং $A - B = C = \begin{vmatrix} 2 - (-3) & 0 - 6 \\ -5 - 4 & 6 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -9 & 5 \end{vmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের যোজন ও বিয়োজন সংক্রান্ত এই নিয়মটি দুয়ের অধিক যেকোন সংখ্যক ম্যাট্রিক্সের জন্যও প্রযোজ্য। যেমন A, B, C তিনটি ম্যাট্রিক্স হলে

$A + B + C = D$ যার $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$

$A - B - C = D$ যার $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} - c_{ij}$ ইত্যাদি।

ম্যাট্রিক্সের যোজন ও বিয়োজনের নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্যসমূহ প্রণিধানযোগ্য ঃ

ক. $A + B = B + A$;

খ. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

গ. $A + 0 = 0 + A = A$ (0–শূন্য ম্যাট্রিক্স)

ঘ. $A + (-A) = (-A) + A = 0$

ঙ. $A + C = B + C$ হলে $A = B$

ম্যাট্রিক্সের পূরণ ঃ

কোন ম্যাট্রিক্সকে একটি সংখ্যা দ্বারা পূরণ করলে গুণফল একটি নতুন ম্যাট্রিক্স হবে যার সাধারণ উপাদান হবে প্রথম ম্যাট্রিক্সটির সাধারণ উপাদান ও সংখ্যাটির গুণফলের সমান। অর্থাৎ a_{ij} যদি A ম্যাট্রিক্সের সাধারণ উপাদান হয় তবে কোন সংখ্যা λ এবং ম্যাট্রিক্স A–এর গুণফল λA–এর সাধারণ উপাদান হবে λa_{ij} ।

যেমন $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$ এবং $\lambda = -5$

দেয়া আছে। সেক্ষেত্রে —

$$\lambda A = \begin{vmatrix} (-5).2 & (-5).0 \\ (-5).(-5) & (-5).6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 25 & -30 \end{vmatrix}$$

কোন সংখ্যা দ্বারা ম্যাট্রিক্সের পূরণের ক্ষেত্রে যেকোন শৃঙ্খলার ম্যাট্রিক্সের জন্যই এই নিয়ম প্রযোজ্য। ম্যাট্রিক্সকে সংখ্যা দ্বারা বিভাজনও পূরণের মতোই সহজ, কোন–না–কোন সংখ্যা λ দ্বারা বিভাজন $\frac{1}{\lambda}$ দ্বারা পূরণেরই সমার্থক। এভাবে

$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -9 \end{vmatrix}$ এবং $\lambda = 3$ হলে $A \div \lambda = A.\frac{1}{\lambda} = A.\frac{1}{3}$

$$\text{সুতরাং } A + \lambda = \begin{vmatrix} \frac{3}{3} & \frac{0}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{6}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{9}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & -3 \end{vmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সকে সংখ্যা দ্বারা পূরণের ক্ষেত্রে দুটি বৈশিষ্ট্য লক্ষণীয় ঃ

ক) A এবং B দুটি সমান শৃঙ্খলার ভিন্ন ভিন্ন ম্যাট্রিক্স এবং λ একটি সংখ্যা হলে λ. $(A - B) = \lambda.A + \lambda.B$;

খ) λ এবং μ দুটি আলাদা সংখ্যা হলে $(\lambda + \mu) = \lambda.A + \mu.A$

ম্যাট্রিক্সকে ম্যাট্রিক্স দ্বারা পূরণ ঃ ধরা যাক A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্স দেয়া আছে এবং

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} 2 \times 3 \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \quad 3 \times 2$$

$$\text{সেক্ষেত্রে } AB = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix} 2\times2$$

$$\text{আবার } B.A = \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{vmatrix} 3\times3$$

A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্সের A যদি $m \times n$ শৃঙ্খলার হয় এবং B যদি $n \times p$ শৃঙ্খলার হয় তবে A.B ম্যাট্রিক্সটি হবে $m \times p$ শৃঙ্খলার। দু'টি ম্যাট্রিক্সের পূরণ তখনই সম্ভব যখন প্রথম ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভের সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারির সংখ্যার সমান হয়। সহজেই অনুমেয় যে দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের গুণফলও একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে। এছাড়া, A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্স হলে $A.B \neq B.A$ (সীমিত সংখ্যক বিশেষ ক্ষেত্রে এ নিয়মের ব্যতিক্রম ঘটতে পারে)। এখন ধরা যাক

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A.B = \begin{vmatrix} 2 \times 3 + 4 \times 1 & 2 \times 0 + 4 \times 2 \\ 5 \times 3 + 6 \times 1 & 5 \times 0 + 6 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 21 & 12 \end{vmatrix}$$

$$B.A = \begin{vmatrix} 3\times2+0\times5 & 3\times4+0\times6 \\ 1\times2+2\times5 & 1\times4+2\times6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix}$$

অথবা, $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ এবং $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ হলে

$$A.B = \begin{vmatrix} 2\times1+3\times2+4\times4 & 2\times0+3\times3+4\times2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 24 & 17 \end{vmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সকে ম্যাট্রিক্স দ্বারা পূরণের বৈশিষ্ট্য ঃ

ক. তিনটি ম্যাট্রিক্স A, B এবং C-এর A যদি $m \times n$ শৃঙ্খলার, B $n \times p$ শৃঙ্খলার এবং C $p \times q$ শৃঙ্খলার হয় তবে তাদের পূরণ সম্ভব এবং A. B. C এর ম্যাট্রিক্স হবে $m \times q$ শৃঙ্খলার ;

খ. $(AB)C = A(BC)$;

গ. $A(B + C) = AB + AC$ এবং $(B + C)A = BA + CA$;

ঘ. $A.0 = 0.A = 0$ (0 – শূন্য ম্যাট্রিক্স)

ঙ. $A.I = I.A = A$ (I একক ম্যাট্রিক্স)

চ. $AB = 0$ হলে তার অর্থ এই নয় যে

দুটি ম্যাট্রিক্সের যেকোন একটি অথবা উভয়েই = 0 অর্থাৎ A এবং B আলাদাভাবে 0 নাও হতে পারে,

ছ. $A.A.A.\ldots n$ বার $= A^n$

ম্যাট্রিক্স-এর পূরণকে রপ্ত করার প্রধান কৌশল হচ্ছে কোন ম্যাট্রিক্সকে একটি সারি ম্যাট্রিক্স দ্বারা পূরণের প্রক্রিয়া সর্বদা স্মরণ রাখা। একটি 1×3 সারি ম্যাট্রিক্স এবং 3×3 ম্যাট্রিক্সের গুণফল দ্বারা এখানে তার নুমনা দেখানো হল ঃ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$
$$= | a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$
$$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} |$$

১৩.১

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ এবং } B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$ হলে A. B এর মান কত?

সমাধান ঃ A ম্যাট্রিক্স 3×3 শৃঙ্খলার, B 3×4 শৃঙ্খলার, অতএব $A \times B$ হবে 3×4 শৃঙ্খলার এবং

$$A.B = \begin{vmatrix} 2\times1+1\times2+0\times3 & 2\times2+1\times0+0\times1 & 2\times3+1\times1+0\times0 & 2\times4+1\times2+0\times5 \\ 3\times1+2\times2+1\times3 & 3\times2+2\times0+1\times1 & 3\times3+2\times1+1\times0 & 3\times4+2\times2+1\times5 \\ 1\times1+0\times2+1\times3 & 1\times2+0\times0+1\times1 & 1\times3+0\times1+1\times0 & 1\times4+0\times2+1\times5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 & 10 \\ 10 & 7 & 11 & 21 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

১৩.২ দুটি ম্যাট্রিক্স A এবং B দেয়া আছেঃ $A = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ এবং

$B = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 8 \end{vmatrix}$; এমন একটি ম্যাট্রিক্স C নির্ণয় কর যেন

$2A + 3B - 4C = 0$ হয়

সমাধান ঃ $2A + 3B \quad 4C =$ $\Rightarrow 4C = 2A + 3B$

$\therefore C = \frac{1}{4}(2A + 3B)$

এখন $2A = 2 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

এবং $3B = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 36 & 24 \end{vmatrix}$

$$\therefore\ 2A + 3B = \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 36 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 20 \\ 40 & 30 \end{vmatrix}$$

এবং $C = \frac{1}{4}\ (2A + 3B = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 20 & 20 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 10 & \frac{15}{2} \end{vmatrix}$

১৩.৩

$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে $A^2 - (a + d)\ A = (bc - ad)\ I$

যেখানে I = একক ম্যাট্রিক্স।

সমাধান ঃ

$$A^2 = A.\ A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \times a + b \times c & a \times b + b \times d \\ c \times a + d \times c & c \times b + d \times d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{vmatrix}$$

$$(a + d).A = (a + d) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ A^2 - (a + d).A = \begin{vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a^2 + bc) - (a^2 + ad) & (ab + bd) - (ab + bd) \\ (ac + cd) - (ac + cd) & (bc + d^2) - (ad + d^2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{vmatrix} = (bc-ad)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (bc-ad)\,I$$

১৩.৪ একটি কোম্পানি বাংলাদেশের 4টি বিভাগের 15টি জেলার মোট 100টি থানায় একটি করে অফিস খুলতে আগ্রহী। প্রতিটি অফিসে একজন প্রধান করণিক, একজন হিসাব রক্ষক, একজন দপ্তরী নিয়োগ প্রয়োজন। এছাড়া বিভাগীয় অফিসগুলিতে অতিরিক্ত একজন করে নির্বাহী কর্মকর্তা, দুজন করে করণিক, একজন মুদ্রাক্ষরিক এবং একজন দপ্তরী প্রয়োজন ; জেলা অফিসগুলিতে প্রয়োজন একজন করে অতিরিক্ত করণিক ও দপ্তরী। সকল শ্রেণীর কর্মচারির মাসিক বেতন নিম্নরূপ ঃ

নির্বাহী কর্মকর্তা — 2500 টাকা, প্রধান করণিক – 1500 টাকা, হিসাব রক্ষক – 1500 টাকা, করণিক – 1100 টাকা, মুদ্রাক্ষরিক – 1000 টাকা এবং দপ্তরী – 500 টাকা।

ক. সকল অফিসের বিভিন্ন শ্রেণীর কর্মচারির মোট সংখ্যা কত?

খ. বিভাগীয়, জেলা এবং পর্যায়ের অফিসসমূহের প্রতিটিতে বেতন বাবদ মোট মাসিক ব্যয় কত?

গ. সকল অফিসের কর্মচারীদের বেতন বাবদ মোট মাসিক ব্যয় কত?

সমাধান ঃ অফিসের সংখ্যা A ম্যাট্রিক্স দ্বারা চিহ্নিত করলে

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 15 & 100 \end{vmatrix}$$

বিভিন্ন পর্যায়ের অফিসে বিভিন্ন প্রকার কর্মচারির সংখ্যা (ম্যাট্রিক্স B) নিম্নরূপ ঃ

	নিক	প্রক	হির	ক	মু	দ
বিভাগ	1	1	1	2	1	2
জেলা	0	1	1	1	0	2
থানা	0	1	1	0	0	1

মাসিক বেতনের ম্যাট্রিক্স C হবে (ম্যাট্রিক্স B–এ উপস্থাপিত কর্মচারিদের ক্রম অনুযায়ী)

$$\begin{vmatrix} 2500 \\ 1500 \\ 1500 \\ 1100 \\ 1000 \\ 500 \end{vmatrix}$$

ক. সকল শ্রেণীর কর্মচারিদের সংখ্যা = A.B = $\begin{vmatrix} 4 & 119 & 119 & 23 & 4 & 138 \end{vmatrix}$
অর্থাৎ, নির্বাহী কর্মকর্তা = 4 ; প্রধান করণিক = 119 ; হিসাবরক্ষক = 119 ; করণিক = 23 ; মুদ্রাক্ষরিক = 4 এবং দপ্তরী = 138 এবং মোট কর্মচারীর সংখ্যা = 4 + 119 + 119 + 23 + 4 + 138 = 407

খ. প্রতি পর্যায়ের অফিসের কর্মচারীর মাসিক বেতন বাবদ ব্যয় = B. C

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2500 \\ 1500 \\ 1500 \\ 1100 \\ 1000 \\ 500 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9700 \\ 5100 \\ 3500 \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ একটি বিভাগীয় অফিসের কর্মচারীদের মোট মাসিক বেতন = 9700 টাকা।
একটি জেলা অফিসের কর্মচারিদের মোট মাসিক বেতন = 5100 টাকা এবং
একটি থানা অফিসের কর্মচারিদের মোট মাসিক বেতন = 3500 টাকা

গ. সকল অফিসের কর্মচারিদের বেতন বাবদ মোট মাসিক ব্যয় —

$$= \begin{vmatrix} 4 & 15 & 100 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 9700 \\ 5100 \\ 3500 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \times 9700 + 15 \times 5100 + 100 \times 3500 \end{vmatrix}$$

= 4,65,300 টাকা।

১৩.৫ একটি কোম্পানি তিনটি পণ্য A, B এবং C উৎপাদন করে এবং সেগুলি X এবং Y দুটি বাজারে প্রতি সপ্তাহে নিম্ন পরিমাণে বিক্রি করে ঃ

	পণ্য		
বাজার	A	B	C
X	800	2000	1500
Y	500	4500	800

A, B এবং C–এর একক প্রতি উৎপাদন ব্যয় যথাক্রমে 50, 25 এবং 30 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য যথাক্রমে 60, 30 এবং 35 টাকা হলে কোম্পানিটির সাপ্তাহিক মুনাফা কত?

সমাধান ঃ X এবং Y বাজার থেকে বিক্রির ফলে অর্জিত মোট আয়

$$= \begin{vmatrix} 60 & 30 & 35 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 800 & 500 \\ 2000 & 4500 \\ 1500 & 800 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 160500 & 193000 \end{vmatrix}$$

আবার X এবং Y বাজারে বিক্রিত পণ্যের উৎপাদন ব্যয়

$$\begin{vmatrix} 50 & 25 & 30 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 800 & 500 \\ 2000 & 4500 \\ 1500 & 800 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13500 & 161500 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \text{ মুনাফা } = \begin{vmatrix} 160500 & 193000 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13500 & 161500 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 25500 & 31500 \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ X বাজার থেকে মুনাফা = 25500 টাকা, Y বাজার থেকে মুনাফা = 31500 টাকা এবং মোট মুনাফা = 25500 + 31500 = 57000 টাকা।

ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক (determinant) **এবং ক্র্যামারের বিধি** (Cramer's rule)

2×2 শৃঙ্খলার একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হবে তার কৌণিক উপাদানসমূহের গুণফলের অন্তর। অর্থাৎ $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ হলে তার নির্ণায়ক হবে $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$। কোন ম্যাট্রিক্স A–এর নির্ণায়ককে det A বা | A | দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। আবার বর্গ ম্যাট্রিক্স যদি 3×3 শৃঙ্খলার হয় তবে তার নির্ণায়ক নির্ধারণের পদ্ধতি নিম্নরূপ ঃ

ধরা যাক,

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{det. } A = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ (প্রথম সারির প্রথম উপাদান) × (প্রথম সারি এবং প্রথম স্তম্ভ বাদ দিয়ে ম্যাট্রিক্সের বাকি অংশ) — (প্রথম সারির দ্বিতীয় উপাদান) × (প্রথম সারি এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ বাদ দিয়ে ম্যাট্রিক্সের বাকি অংশ) + (প্রথম সারির তৃতীয় উপাদান) × (প্রথম সারি এবং তৃতীয় স্তম্ভ বাদ দিয়ে ম্যাট্রিক্সের বাকি অংশ)।

বা, $\det. A = a_1(b_2c_3-b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

গাণিতিক ক্ষেত্রে ব্যবহারের সুবিধার্থে ম্যাট্রিক্সের সংখ্যাগত মানকে সাধারণত D দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

নির্ণায়ক ব্যবহার করে চলকের সংখ্যা এবং সমীকরণের সংখ্যা সমান এমন যুগপৎ সরল সমীকরণের (Simaltaneous linear equation) সমাধান নির্ণয় করা যায়। যে বিধি অনুসারে এই সমাধান পাওয়া যায় তাই ক্র্যামারের বিধি নামে পরিচিত। এ বিধি কয়েকটি ধাপে এ ধরণের সমীকরণের সমাধান প্রক্রিয়া নির্দেশ করে। নিচে তা ব্যাখ্যা করা হল।

ধরা যাক দুটি চলকের দুটি সরল সমীকরণ দেয়া আছে ঃ

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

সমাধানের জন্য ধাপসমূহ

ক. x এবং y–এর সহগসমূহ নিয়ে ম্যাট্রিক্স তৈরি করলে তা হবে

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \ldots (1)$$

এবং তার নির্ণায়কের মান $D = a_1b_2 - a_2b_1$

খ. সমান চিহ্নের ডানদিকের মানদ্বয়ের ম্যাট্রিক্স হবে $\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} \ldots (2)$

গ. (1) নং ম্যাট্রিক্সের x–এর সহগদ্বয়ের স্থলে স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (2) বসালে তা হবে

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ তার নির্ণায়কের মান $D_x = (c_1b_2 - c_2b_1)$

(1) নং ম্যাট্রিক্সে y–এর সহগদ্বয়ের স্থলে স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (2) বসালে তা হবে

$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ তার নির্ণায়কের মান $D_y = (a_1c_2 - a_2c_1)$

ঘ. x–এর মান $= \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ এবং

y–এর মান $= \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

উল্লেখ্য যে ক্র্যামারের বিধি শুধু তখনই প্রয়োগ করা সম্ভব যখন $D \neq 0$.

একইভাবে তিনটি চলক x, y এবং z এর জন্য তিনটি সমীকরণ দেয়া থাকলে D, D_x, D_y এবং D_z নির্ণয় করে তাদের মাধ্যমে x, y এবং z এর মান যথাক্রমে $\dfrac{D_x}{D}$, $\dfrac{D_y}{D}$ এবং $\dfrac{D_z}{D}$ দ্বারা নির্ণয় করা যায়।

১৩.৬ **সমাধান কর ঃ**

$$3x + 4y - 13 = 0$$
$$2x - y = 5$$

এখন $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -13 - 20 = -33 \therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-33}{-11} = 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 26 = -11 \quad \therefore \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{-11} = 1$$

১৩.৭ $3x - y + 5z = 4$

$5x + 3y - z = -3$

$-x + 5y + 3z = 2$ x, y, z এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{3 \times 3 - 5(-1)\} + 1\{5 \times 3 \quad (-1)(-1)\} + 5(5 \times 5 - (-1) \times 3\}$$

$$= 196 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -56$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -42$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 182$$

$$\therefore\ x = \frac{D_z}{D} = \frac{-56}{196} = -\frac{2}{7}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-42}{196} = -\frac{3}{14}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{182}{196} = \frac{13}{14}$$

ম্যাট্রিক্সের অনুরাশি (minor) **এবং সহগুণক** (Cofactor)

কোন ম্যাট্রিক্সের একটি নির্দিষ্ট উপাদান যে সারি এবং স্তম্ভে থাকে সেই সারি এবং স্তম্ভ বাদ দিয়ে ম্যাট্রিক্সের অবশিষ্টাংশ দ্বারা গঠিত উপম্যাট্রিক্সকে (Submatrix) উক্ত উপাদানের অনুরাশি বলে। যেমন

$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ হলে, প্রথম সারির প্রথম স্তম্ভের উপাদান 2 এর অনুরাশি হবে $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$, দ্বিতীয় সারির তৃতীয় স্তম্ভের উপাদান 3 এর অনুরাশি হবে $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$,

তৃতীয় সারির দ্বিতীয় স্তম্ভের উপাদান 6 এর অনুরাশি হবে $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ইত্যাদি।

কোন ম্যাট্রিক্সের i–তম সারির j–তম স্তম্ভের উপাদান a_{ij} হলে তার অনুরাশিকে M_{ij} দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং M_{ij}–কে $(-1)^{i+j}$ দ্বারা পূরণ করলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাকে a_{ij}–এর সহগুণক বলে। প্রদত্ত A ম্যাট্রিক্সের a_{23} উপাদানটি হচ্ছে 3, a_{23} এর অনুরাশি M_{23} হবে $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ এবং তার সহগুণক $A_{ij} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

$$= -(2 \times 6 - 1 \times 5$$
$$= -7$$

বর্গম্যাট্রিক্সের সংলগ্নক (Adjoint)

$n \times n$ শৃঙ্খলার কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A–এর সবকটি উপাদানের সহগুণককে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করলে যদি তা $|A_{ij}|_{n \times n}$ হয় তবে A_{ij} ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের সংলগ্নক বলে এবং তাকে Adj A দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ধরা যাক 3×3 শৃঙ্খলার একটি ম্যাট্রিক্স A দেয়া আছে ঃ

$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ লেখার সুবিধার জন্য A–এর উপাদানসমূহকে $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 4$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করলে,

$A_{11} = a_{11}$এর সহগুণক $= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-5 - 18) = -23$

$A_{12} = a_{12}$–এর সহগুণক $= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 12) = -11$

$A_{13} = a_{13}$–এর সহগুণক $= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 10) = 13$

$A_{21} = a_{21}$–এর সহগুণক $= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3-12) = 15$

এবং এভাবে $A_{22} = 6$, $A_{23} = -12$, $A_{31} = -2$, $A_{32} = -8$ এবং $A_{33} = 7$

$$\therefore \quad A_{ij} = \begin{vmatrix} -23 & -11 & 13 \\ 15 & 6 & -12 \\ -2 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{Adj } A = A'_{ij} = \begin{vmatrix} -23 & 15 & -2 \\ 11 & 6 & -8 \\ 13 & -12 & 7 \end{vmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের সংলগ্নকের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হচ্ছে এই যে, $n \times n$ শৃঙ্খলার ম্যাট্রিক্স A এর সংলগ্নক Adj A দ্বারা চিহ্নিত করলে

$A. (\text{Adj } A) = (\text{Adj } A). A = |A| \; I_{n\times n}$ যেখানে $|A|$ হচ্ছে A ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান এবং $I_{n\times n}$ হচ্ছে $n \times n$ শৃঙ্খলার একক ম্যাট্রিক্স।

ব্যাখ্যা স্বরূপ দেখানো যায় যে, প্রদত্ত উদাহরণের A ম্যাট্রিক্সের জন্য

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 2(-5 - 18) - 3(-1 + 12) + 4(3 + 10) = \; 27$

$$\text{আবার } A. (\text{Adj } A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -23 & 15 & -2 \\ -11 & 6 & -8 \\ 13 & -12 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{vmatrix} = -27 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -27\ I_{3\times3} = |A|\ I_{3\times3}$$

বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse matrix)

$n \times n$ শৃঙ্খলার কোন একটি ম্যাট্রিক্স A দেয়া থাকলে অপর একটি ম্যাট্রিক্স B–কে A–এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি $AB = BA = I_{n\times n}$ হয়

A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n\times n}$$

বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের বিভিন্ন প্রকার পদ্ধতির (সহগুণক পদ্ধতি, রৈখিক সমীকরণ ব্যবহারের পদ্ধতি, গাউস পদ্ধতি) মধ্যে এখানে শুধু সহগুণক পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করা হল।

সহগুণক পদ্ধতিতে কোন ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাবার জন্য প্রথমে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির সংলগ্নক নির্ধারণ করা হয় অতঃপর

$A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$ সূত্র প্রয়োগ করে বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।

ইতিপূর্বে উপস্থাপিত $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের জন্য

$|A| = -27$ এবং $\text{Adj } A = \begin{vmatrix} -23 & 15 & -2 \\ -1 & 6 & -8 \\ 13 & -12 & 7 \end{vmatrix}$

এবং সহগুণক পদ্ধতিতে $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|} = \dfrac{1}{27} \begin{vmatrix} -23 & 15 & -2 \\ -11 & 6 & -8 \\ 13 & -12 & 7 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{23}{27} & \frac{15}{27} & -\frac{2}{27} \\ -\frac{11}{27} & \frac{6}{27} & -\frac{8}{27} \\ \frac{13}{27} & -\frac{12}{27} & \frac{7}{27} \end{vmatrix}$$

সহজেই অনুধাবনযোগ্য যে যদি কোন ম্যাট্রিক্স A–এর জন্য $|A| = 0$ হয় তবে তার কোন বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে না কেন না সেক্ষেত্রে $\frac{\text{Adj A}}{|A|}$ নির্ধারণ অসম্ভব। অন্য কথায়, কোন ম্যাট্রিক্স A–এর বিপরীত A^{-1} তখনই থাকতে পারে যখন $|A| \neq 0$।

কোন ব্যবহারিক সমস্যার গাণিতিক সূত্রায়নের মাধ্যমে পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলকসমূহের দ্বারা যদি যুগপৎ রৈখিক সমীকরণ তৈরি করা যায় তবে তার সমাধানের ক্ষেত্রে বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিশেষভাবে সাহায্য করে। ধরা যাক একটি সহজ বাণিজ্যিক সমস্যাকে গাণিতিকভাবে সাজিয়ে নিচের সমীকরণসমূহ পাওয়া গেল ঃ

$$-x_1 - 5x_2 = -7$$

$$-2x_1 + 3x_2 = -1$$

এবং এখান থেকে x_1 ও x_2–এর মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের x_1 এবং x_2–এর সহগসমূহ ব্যবহার করে একটি ম্যাট্রিক্স A তৈরি করা যায় এবং

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

ধরা যাক x_1 এবং x_2 এর মানদ্বয়ের ম্যাট্রিক্স $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$

সেক্ষেত্রে $\begin{vmatrix} -x_1 - 5x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = AX$

এবারে $\begin{vmatrix} -7 \\ -1 \end{vmatrix}$ ম্যাট্রিক্সকে B দ্বারা চিহ্নিত করলে

$$AX = B$$

বা, $A^{-1}.AX = A^{-1}B$

বা, $IX = A^{-1}B \quad \therefore X = A^{-1}B$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \text{ থেকে } A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{vmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{vmatrix} -\frac{3}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -7 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{13}(-7) + (-\frac{5}{13})(-1) \\ (-\frac{2}{13})(-7) + \frac{1}{13}(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

বা, $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \therefore x_1 = 2$

$x_2 = 1$

উল্লেখ্য যে যুগপৎ রৈখিক সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে বিপরীত ম্যাট্রিক্স অপরিহার্য নয়। ম্যাট্রিক্স ও তার নির্ণায়ক ব্যবহার করেও তার সমাধান করা যায়।

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার সমস্যা সমাধানের মূল কৌশল হচ্ছে সমস্যাগুলিকে যুগপৎ রৈখিক সমীকরণের মাধ্যমে উপস্থাপনা করা। এরপর সেসব সমীকরণের চলকসমূহের সহগ এবং চলক ব্যতিত ধ্রুব মানসমূহের দ্বারা ম্যাট্রিক্স গঠন। অতঃপর ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বা বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে চলকসমূহের মান নির্ণয় করা।

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে যেসব ব্যবহারিক সমস্যা সমাধান করা যায় তাদের বর্ণনা বা উপস্থাপনা থেকে ম্যাট্রিক্স গঠনের প্রক্রিয়াটি মোটামুটিভাবে সবক্ষেত্রেই একই ধরনের। তাই এ অধ্যায়ে ব্যবহারিক সমস্যার সীমিত সংখ্যক উদাহরণ দেয়া হল।

১৩.৮ তিন ব্যক্তি A, B এবং C-এর নিকট যথাক্রমে 3000, 2000 এবং 2500 টাকা আছে। A তার সব টাকা দিয়ে একটি কোম্পানির x টাকা মূল্যের 5টি, y টাকা মূল্যের 3টি এবং z টাকা মূল্যের 4টি শেয়ার কেনে। B কেনে x টাকা মূল্যের 3টি, y টাকা মূল্যের 4টি এবং z টাকা মূল্যের 2টি আর C কেনে x টাকা মূল্যের 4 টি, y টাকা মূল্যের 3টি এবং z টাকা মূল্যের 4টি শেয়ার। প্রতি প্রকার শেয়ারের একক প্রতি মূল্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত শর্ত থেকে নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ পাওয়া যায়

$$5x + 3y + 4z = 3000$$
$$3x + 4y + 2z = 2000$$
$$4x + 3y + 4z = 2500$$

x, y এবং z এর সহগসমূহ দিয়ে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ এবং তার নির্ণায়ক } D = 5\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ 4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 10$$

$$\text{আবার } D_x = \begin{vmatrix} 3000 & 3 & 4 \\ 2000 & 4 & 2 \\ 2500 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3000\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2000 & 2 \\ 2500 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+4\begin{vmatrix} 2000 & 4 \\ 2500 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5000$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 5 & 3000 & 4 \\ 3 & 2000 & 2 \\ 4 & 2500 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2000 & 2 \\ 2500 & 4 \end{vmatrix} - 3000\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2000 \\ 4 & 2500 \end{vmatrix}$$

$$= 1000$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3000 \\ 3 & 4 & 2000 \\ 4 & 3 & 2500 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 2000 \\ 3 & 2500 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2000 \\ 4 & 2500 \end{vmatrix} + 3000\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 500$$

$$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{5000}{10} = 500 \text{ টাকা}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ টাকা}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{500}{10} = 50 \text{ টাকা}$$

১৩.৯ একটি পরিবহণ কোম্পানির A, B এবং C তিন ধরনের ট্রাক আছে। প্রতি ধরনের ট্রাকে I, II এবং III প্রকারের যন্ত্র নিম্নলিখিত সংখ্যায় ওঠানো যায় ঃ

ট্রাকের ধরণ

যন্ত্র	A	B	C
I	3	4	1
II	1	5	3
III	2	4	2

পরিবহণের জন্য I প্রকার যন্ত্র মোট 27টি, II প্রকার যন্ত্র মোট 29টি এবং III প্রকার যন্ত্র মোট 26টি জমা করা হলে সেগুলি স্থানান্তর করতে কোম্পানিকে কোন ধরনের ট্রাক কতটি ব্যবহার করতে হবে?

সমাধান ঃ ধরা যাক, A ধরনের ট্রাক x টি, B ধরনের ট্রাক yটি এবং C ধরনের ট্রাক zটি প্রয়োজন। প্রদত্ত তথ্য থেকে

$$3x + 4y + z = 27$$
$$x + 5y + 3z = 29$$
$$2x + 4y + 2z = 26$$

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে যুগপৎ সমীকরণসমূহ সমাধান করলে

$x = 3, y = 4$ এবং $z = 2$

(নিজে নিজে সমাধান কর)

$\therefore$ A ধরনের ট্রাক প্রয়োজন 3টি, B ধরনের ট্রাক প্রয়োজন 4টি এবং C ধরনের প্রয়োজন 2টি।

১৩.১০ তিন ধরনের মোটর গাড়ি উৎপাদনে বিভিন্ন উপাদানের প্রয়োজনীয় পরিমাণ নিম্নরূপ ঃ

	শ্রম (ঘন্টা)	বিভিন্ন যন্ত্রাংশ (একক)	অন্যান্য বস্তুগত উপাদান (একক)
A	40	150	50
B	60	200	80
C	80	250	100

প্রতি শ্রম ঘন্টার মজুরি 4 ডলার, প্রতি একক যন্ত্রাংশের মূল্য গড়ে 3 ডলার এবং অন্যান্য বস্তুগত উপাদানের মূল্য একক প্রতি গড়ে 2 ডলার হলে A, B এবং C প্রকারের 2000, 1000 এবং 500 একক গাড়ি উৎপাদনের মোট ব্যয় নির্ণয় কর। একটি গাড়ির গড় উৎপাদন ব্যয় কত ?

সমাধান ঃ উৎপাদনের উপাদানের ম্যাট্রিক্স P হলে

$$P = \begin{vmatrix} 40 & 150 & 50 \\ 60 & 200 & 80 \\ 80 & 250 & 100 \end{vmatrix}$$

উৎপাদনের উপাদানসমূহের একক প্রতি মূল্যের ম্যাট্রিক্স Q হলে $Q = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$

তিন প্রকার গাড়ির একক প্রতি উৎপাদন ব্যয় = P. Q এবং

$$P.\,Q = \begin{vmatrix} 40 & 150 & 50 \\ 60 & 200 & 80 \\ 80 & 250 & 100 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 710 \\ 1000 \\ 1270 \end{vmatrix}$$

আবার বিভিন্ন গাড়ির সংখ্যার ম্যাট্রিক্স $R = \begin{vmatrix} 2000 & 1000 & 500 \end{vmatrix}$

$$\therefore \text{ মোট উৎপাদন ব্যয় } = P.\,Q.\,R = \begin{vmatrix} 710 \\ 1000 \\ 1210 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2000 & 1000 & 500 \end{vmatrix}$$

$= 3025000$ ডলার

এবং একটি গাড়ির গড় উৎপাদন ব্যয় $= 3025000 \div (2000 + 1000 + 500)$

$= 864.29$ ডলার।

অনুশীলনী — ১৩

১. ম্যাট্রিক্স ও তার শৃঙ্খলা সম্পর্কে ধারণা দাও। বর্গ ম্যাট্রিক্স কাকে বলে?

২. স্কেলার ও একক ম্যাট্রিক্সের মধ্যে পার্থক্য কি?

৩. ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্স বলতে কি বোঝায়? ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্যকে সাধারণভাবে উপস্থাপন কর।

৪. ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ বলতে কি বুঝায়? তার বৈশিষ্ট্যসমূহ বর্ণনা কর। ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ এবং প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের মধ্যে পার্থক্য কি?

৫. ম্যাট্রিক্সের সমতা বলতে কি বুঝায়? ম্যাট্রিক্সের যোজন এবং বিয়োজন কিভাবে করা যায় উদাহরণের সাহায্যে দেখাও।

৬. দুটি ম্যাট্রিক্সের পূরণ প্রক্রিয়াটি একটি উদাহরণ দ্বারা ব্যাখ্যা কর; "কোন ম্যাট্রিক্সকে একক ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ করলে তার গুণফল ম্যাট্রিক্সটির সমান" — প্রমাণ কর।

৭. ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক কি? ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের সাহায্যে যুগপৎ রৈখিক সমীকরণ ব্যবস্থার সমাধান প্রক্রিয়াটি ব্যাখ্যা কর।

৮. টিকা লিখ : ম্যাট্রিক্সের অনুরাশি ; ম্যাট্রিক্সের সহগুণক ; ক্র্যামারের বিধি, ম্যাট্রিক্সের সংলগ্নক।

১০. নিচের ম্যাট্রিক্সসমূহ কোনটি কোন শ্রেণীর তা নির্দেশ কর :

(ক) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (খ) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ (গ) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

(ঘ) $\begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{vmatrix}$ (ঙ) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ (চ) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ (ছ) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

(জ) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (ঝ) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 5 \\ 9 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ (ঞ) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

১১. $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ এবং $C = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 8 & 4 & -10 \end{vmatrix}$

হলে (ক) $A - B + C$ (খ) $2(A - B)$ (গ) $3A + 2B - 3C$ (ঘ) $3B + 2A$ এবং (ঙ) $2A + 3B$–এর মান নির্ণয় কর।

১২. $A = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ এবং $B = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ হলে এমন একটি ম্যাট্রিক্স C নির্ণয় কর যেন (ক) $2B = A - 5C$ হয় এবং (খ) $C + A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ হয়।

১৩. $A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে $A^3 = A$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

১৪. $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix}$

এবং $C = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

প্রমাণ কর যে AB এবং CA উভয়েই শূন্য ম্যাট্রিক্স, কিন্তু $BA \neq 0$ এবং $AC \neq 0$

১৫. এক দোকানী সপ্তাহের প্রথম দিন 3 কেজি ডাল, 20 কেজি চাল, 12 কেজি আলু এবং 3 কেজি পেয়াজ বিক্রি করে। দ্বিতীয় দিন এসব পণ্যের বিক্রির পরিমাণ যথাক্রমে 4 কেজি, 26 কেজি, 10কেজি এবং 4 কেজি। পণ্যগুলির কেজি প্রতি মূল্য প্রথম দিন যথাক্রমে 20 টাকা, 10 টাকা, 5 টাকা এবং 6 টাকা। দ্বিতীয় দিন প্রতিটি পণ্যের মূল্য কেজি প্রতি .50 টাকা কম হলে দোকানীর দুদিনের মোট বিক্রির পরিমাণ কত টাকা?

১৬. দুটি কারখানা X এবং Y দুটি পণ্য A এবং B দৈনিক নিম্ন পরিমাণে উৎপন্ন করে

	কারখানা	
পণ্য	X	Y
A	200	100
B	400	300

X কারখানাটি সপ্তাহে 5 দিন এবং Y কারখানাটি সপ্তাহে 6 দিন চালু থাকলে কোন পণ্যের কতখানি উৎপাদন করা যাবে?

১৭. $B = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে $\text{Adj } B = 3B'$

১৮. $P = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ এবং $PQ = \begin{vmatrix} 22 & 6 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$ হলে Q ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

১৯ নিচের ম্যাট্রিক্সটির সংলগ্নক এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

২০. **সমাধান কর :** ক) $2x + 6y = 11$; $6x + 20y = 6z - 3$; $6y - 18z + 1 = 0$ খ) $3x_1 + x_2 + x_3 = 1$; $2(x_1 + x_3) = 0$; $5x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

২১. $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ এবং $B = \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \end{vmatrix}$

সেক্ষেত্রে $AX = B$ হলে x_1 এবং x_2 এর মান কত ?

২২. একটি আসবাবপত্র তৈরি কারখানা কাজের সুবিধার জন্য ব্যবহৃত কাঠকে নির্দিষ্ট আকারের টুকরোয় কেটে জমা রাখে। একটি টেবিল বানাতে তার 5 ঘণ্টা শ্রম এবং 6 টুকরা কাঠ লাগে আর একটি চেয়ার বানাতে লাগে 3 ঘণ্টা শ্রম এবং 3 টুকরা কাঠ। প্রতি সপ্তাহে 20টি টেবিল এবং 30টি চেয়ার তৈয়ার করতে হলে সপ্তাহে কত শ্রম ঘণ্টা এবং কত টুকরা কাঠ ব্যয় করতে হবে ?

২৩. একটি বেকারি বিভিন্ন প্রকার কেক তৈরিতে প্রতি এককে বিভিন্ন উপাদানের যত পরিমাণ ব্যবহার করে তার তালিকা নিম্নরূপ :

উৎপাদনের পরিমাণ (পাউন্ডে)

কেকের ধরণ	ময়দা	ক্রিম	চিনি
A	5	2	1
B	6	3	1
C	5	3	2

ক. 50টি A ধরনের, 30টি B ধরনের এবং 20টি C ধরনের কেক তৈরি করতে কোন প্রকারের উপাদান কত পরিমাণ প্রয়োজন তা নির্ণয় কর।

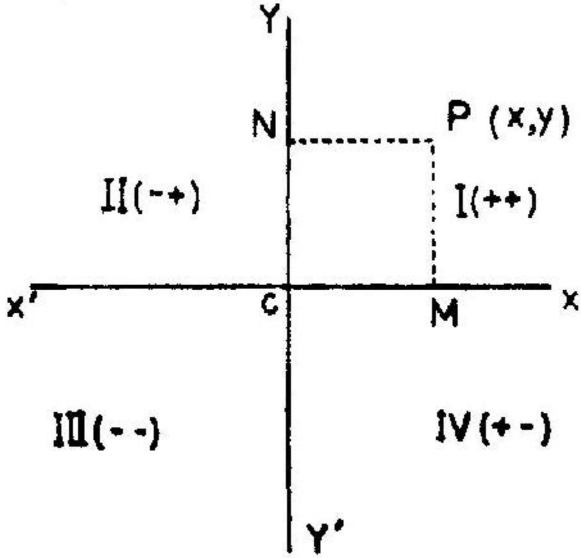
খ. 3700 পাউন্ড ময়দা, 1700 পাউন্ড ক্রিম এবং 800 পাউন্ড চিনি দিয়ে কোন প্রকারের কতটি কেক তৈরি করা যাবে ?

চতুর্দশ অধ্যায়

স্থানাংকমিতি

[CORDINATE GEOMETRY]

সমতল ক্ষেত্রে কোন বস্তুর অবস্থান বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করলে বিন্দুটিকে নির্দিষ্ট করে বুঝানোর জন্য স্থানাংক (Co ordinates) ব্যবহার করা হয়। স্থানাংক একটি আপেক্ষিক ধারণা। সমতল ক্ষেত্রটির কোন স্থানে পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী দুটি সরলরেখা আঁকলে তাদের ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু (origin) এবং রেখাদ্বয়কে দুটি অক্ষ (axis) বিবেচনা করে তার তুলনায় বিন্দুর অবস্থান স্থানাংক দ্বারা নির্দেশ করা যায়।



[চিত্র ১০]

X'OX এবং YOY' দুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী সরলরেখা O বিন্দুতে একে অপরকে ছেদ করেছে। O বিন্দুটিকে মূলবিন্দু ধরে X'OX রেখাকে X-অক্ষ, YOY' রেখাকে Y-অক্ষ বলা হয়।

সমতল ক্ষেত্রটিকে কোন বস্তুর অবস্থান P বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত হলে Y অক্ষ থেকে P-বিন্দুর দূরত্ব PN = x কে ভুজ (abscissa) এবং X-অক্ষ থেকে P-এর দূরত্ব PM = y কে কোটি (ordinate) বলে এবং স্থানাংক হচ্ছে ভুজ ও কোটির সমষ্টিগত প্রকাশ অর্থাৎ P বিন্দুর জন্য স্থানাংক হচ্ছে (x, y)। স্থানাংক প্রকাশে সর্বদা প্রথমে ভুজ, পরে কোটির মান দেয়া হয়।

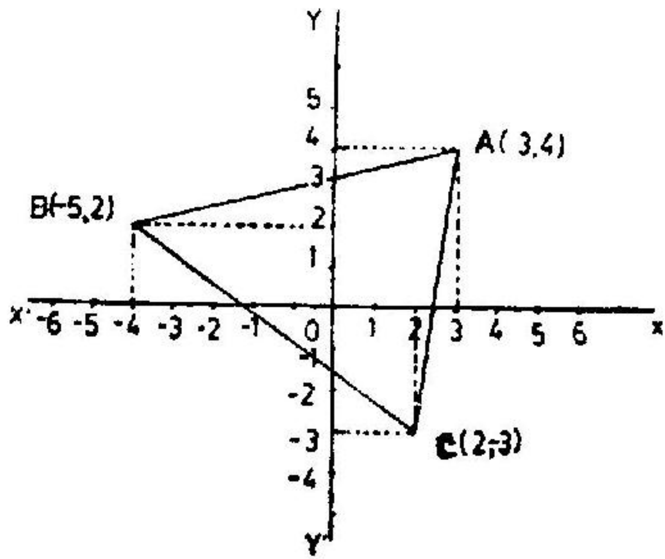
লক্ষণীয় যে X'OX এবং YOY' সমতল ক্ষেত্রকে চারভাগে বিভক্ত করে। চিত্রে সেগুলি I, II, III এবং IV দ্বারা দেখানো হয়েছে এদের একেকটিকে একটি চতুর্ভাগ (quadrant) বলে। YOX চতুর্ভাগটি প্রথম চতুর্ভাগ (first quadrant) এবং এখানে অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাংক নির্দেশক ভূজ এবং কোটি উভয়েই ধনাত্মক। দ্বিতীয় চতুর্ভাগ X'OY-এ ভুজ ঋণাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক। তৃতীয় চতুর্ভাগ X'OY'-এ ভূজ ও কোটি উভয়েই ঋণাত্মক আর চতুর্থ চতুর্ভাগ Y'OX-এ ভূজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক। কোন বিন্দুর স্থানাংক (5, – 4) হলে তার অবস্থান হবে চতুর্থ চতুর্ভাগে এবং বিন্দুটি Y অক্ষ থেকে (X অক্ষ বরাবর) 5 একক ও X অক্ষ থেকে (Y অক্ষ বরাবর) 4 একক দূরে আবার কোন বিন্দুর স্থানাংক (–3, 2) হবার অর্থ হচ্ছে তার অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে, Y অক্ষ থেকে তার দূরত্ব 3 একক, X-অক্ষ থেকে তার দূরত্ব 2 একক।

সাধারণভাবে স্থানাংক নির্দেশের জন্য (x, y)-ব্যবহার করা হয় এবং তার অর্থ হচ্ছে বিন্দুটির ভূজ অর্থাৎ X অক্ষ বরাবর দূরত্ব x এবং কোটি অর্থাৎ Y-অক্ষ বরাবর দূরত্ব y

স্থানাংক সম্পর্কে প্রাথমিকভাবে জানা প্রয়োজন ঃ (ক) মূলবিন্দুর স্থানাংক (0, 0); (খ) X-অক্ষের উপরে সকল বিন্দুর কোটি 0 অর্থাৎ X অক্ষ বরাবর বিন্দুটির দূরত্ব (মূলবিন্দু থেকে) x হলে তার স্থানাংক (x, 0); (গ) Y অক্ষের উপরে যে কোন বিন্দুর ভূজ 0 অর্থাৎ মূল-বিন্দু থেকে Y অক্ষ বরাবর বিন্দুটির দূরত্ব y হলে তার স্থানাংক (o, y)

এখানে যে জাতীয় স্থানাংকের কথা আলোচিত হচ্ছে তাকে সমকোণী বা কার্তেসীয় (cartesian) স্থানাংক বলে। ব্যবহারিক গণিতে ভিন্ন জাতীয় স্থানাংকের প্রয়োগ থাকলেও তা সীমিত বলে বর্তমান গ্রন্থে শুধু কার্তেসীয় স্থানাংক নিয়ে আলোচনা করা হবে।

এখন, ধরা যাক A, B, ও C তিনটি বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (3, 4), (–5, 2) এবং (2, – 3) দেয়া আছে। লেখচিত্র বিন্দুসমূহের অবস্থান নির্দেশ করতে হবে।



[চিত্র ঃ ১১]

প্রদত্ত বিন্দু তিনটির স্থানাংক A = (3, 4), B = (– 5, 2) এবং C = (2, – 3)। A বিন্দুটি প্রথম চতুর্ভাগে এবং তা Y অক্ষ থেকে ডান দিকে 3 একক আর X অক্ষ থেকে উপরের দিকে 4 একক দূরে। X এবং Y অক্ষকে নির্দিষ্ট একক দ্বারা ভাগ করে তাদের উপর 1, 2, 3 ইত্যাদি এবং – 1, – 2, – 3 ইত্যাদি দাগ কেটে তদনুযায়ী X অক্ষের উপরে 3–এর দাগে উপরের দিকে একটি লম্ব টানতে হবে। অতঃপর Y অক্ষের উপরে 4 এর দাগে ডানপাশের দিকে অপর একটি লম্ব টানতে হবে। লম্ব দুটি পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করবে সেটিই হবে A (3, 4) বিন্দুর অবস্থান। চিত্রে একইভাবে নির্ণীত B এবং C–এর অবস্থানও দেখানো হয়েছে।

A এবং B বিন্দুদ্বয়কে যুক্ত করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যাবে। এরপর A এবং C, B এবং C যুক্ত করে দিলে B C এবং A C অপর দুটি সরল রেখা পাওয়া যাবে। এছাড়া A, B এবং C একটি ত্রিভুজ তৈরি করে।

স্থানাংকমিতির সাহায্যে অনেক সমস্যার সমাধান করা যায়। যেমন, A এবং B দুটি বস্তুর স্থানাংক জানা থাকলে তাদের মধ্যকার দূরত্ব কোন কিছু দিয়ে পরিমাপ না করেও বলা যায়, A এবং B–এর মধ্যবর্তী বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়, AB সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। তৃতীয় একটি বস্তু C–এর স্থানাংক জানা থাকলে ABC যে

ত্রিভুজ তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল নির্ধারণ করা যায়। তিনটি বিন্দুর স্থানাংক দিয়েই কোন ভৌত পরিমাপন (Physical measurement) ছাড়াই তারা একই সরল রেখায় অবস্থান করে কিনা তা বলে দেয়া যায় ইত্যাদি। ব্যবহারিক গণিতে এর সবগুলিরই গুরুত্ব সমধিক। এখানে স্থানাংকমিতির কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্র দেয়া হল।

ক) A এবং B দুটি বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হলে A এবং B এর মধ্যকার দূরত্ব।

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ একক

যেমন A (3, 4) এবং B(–5, 2) এর মধ্যকার

দূরত্ব $= \sqrt{(-5-3)^2 + (2-4)^2}$

$= 2\sqrt{17}$ একক

খ) $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দুটি বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখা AB–এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক x_m এবং y_m হলে

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ এবং $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$

যেমন, A(2, 4) এবং B(–5, 2) এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক

$x_m = \frac{3-5}{2}, y_m = \frac{4+2}{2}$ অর্থাৎ (– 1, 3)

গ) A (x_1, y_1) এবং $B(x_2, y_2)$ এর সংযোগকারী সরলরেখা AB–এর উপরে অবস্থানকারী কোন বিন্দু R যদি AB-কে m : n অনুপাতে বিভক্ত করে অর্থাৎ $\frac{AR}{RB} = \frac{m}{n}$ হয় তবে R–এর স্থানাংক হবে

$x_1 = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$ এবং $y_r = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$

ঘ) তিনটি বিন্দু A (x_1, y_1), $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ দ্বারা তৈরি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)]$ বর্গ একক

A (3, 4), B(–5, 2) এবং C(2, – 3) দেয়া থাকলে

$\Delta ABC = \frac{1}{2}[3(2+3) + (-5)(-3-4) + 2(4-2)]$ বর্গ একক

$= 27$ বর্গ একক।

লক্ষণীয় যে তিনটি বিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থান করলে তাদের দ্বারা কোন ত্রিভূজ তৈরি হবে না, অতএব ত্রিভূজের ক্ষেত্রফলের সূত্রের সাহায্যে ΔABC-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করলে তা শূন্য হবে। আবার তিনটি বিন্দু ত্রিভুজ তৈরি করলে স্থানাংকের সাহায্যে তাদের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে ত্রিভূজটি সমবাহু, সমদ্বিবাহু কিংবা বিষমবাহু তা নির্ধারণ করা যায়। চারটি বিন্দু যদি কোন চতুর্ভুজ তৈরি করে তবে তাদের দুটি পরস্পর বিপরীত কৌণিক বিন্দু জুটির যেকোন একটি জুটির দুটি বিন্দুর সংযোগ রেখাটি চতুর্ভুজকে দুটি ত্রিভূজের সমষ্টি হিসাবে উপস্থাপিত করে. তখন স্থানাংক ব্যবহার করে দুটি ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পর ক্ষেত্রফলদ্বয় যোগ করলেই চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে।

সরলরেখার সমীকরণ ঃ

$A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$–এর মধ্য দিয়ে অতিক্রান্ত সরল রেখা AB–এর সমীকরণ হচ্ছে

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \text{বা, } y - y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x - x_1)$$

$A(3, 4)$ এবং $B(-5, 2)$ এর মধ্য দিয়ে অতিক্রান্ত সরল রেখার সমীকরণ হবে

$$y - 4 = \frac{4-2}{3+5}(x-3)$$

$$= + \frac{1}{4}(x-3)$$

বা, $4y - 16 = x - 3$

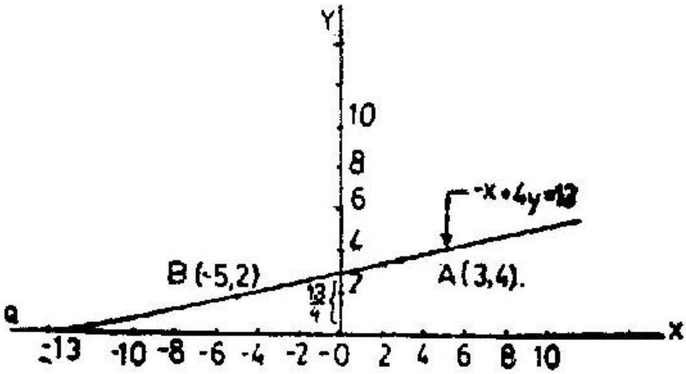
বা, $-x + 4y = 13$

প্রাপ্ত সমীকরণটি ব্যবহার করে তার লেখচিত্র অংকন করা যাক। লেখচিত্রটি দু'ভাবে আঁকা যায় ঃ (ক) যেহেতু রেখাটি $A(3, 4)$ এবং $B(-5, 2)$–এর মধ্য দিয়ে যায়, লেখচিত্রে A এবং B বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের পর A এবং B–কে সংযুক্ত করে রেখাটি পাওয়া যায়। (খ) $-x + 4y = 13$ সমীকরণটি সিদ্ধ থাকে x এবং y–এর এমন যেকোন দুই জুটি মানের সাহায্যে দুটি বিন্দু নিয়ে লেখচিত্রে তাদের অবস্থান নির্দেশ করা যায় এবং এ দুটি বিন্দু যোগ করে রেখাটি পাওয়া যায়। (খ) পদ্ধতিতে $-x + 4y = 13$ রেখার উপরে অবস্থিত দুটি বিন্দু নিম্নরূপে নির্ধারণ করা যায় ঃ যদি $x = 0$ হয় তবে $0 + 4y = 13 \therefore y = \frac{13}{4}$. অতএব একটি বিন্দু $P = \left(0, \frac{13}{4}\right)$; যদি $y = 0$ হয় তবে $-x +$

$4.0 = 13 \quad \therefore \quad x = -13$ এবং অপর একটি বিন্দু $Q = (-13, 0)$ এভাবে দুটি বিন্দু নির্ণয়ের জন্য প্রথমে x বা y এর যেকোন একটির কোন মান ধরে নিয়ে তার জন্য অপরটির মান নির্ধারণ করা যায়।

তবে যেকোন পদ্ধতিতেই সমীকরণটির জন্য লেখচিত্র অংকন করি না কেন তাতে একই সরল রেখা পাওয়া যাবে।

এবং লেখচিত্রটি হবে



[চিত্র – ১২]

সরল রেখাটি Y অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দুর স্থানাংক $\left(0, \frac{13}{4}\right)$ অর্থাৎ $OP = \frac{13}{4}$ এই মানকে সরল রেখার ছেদ (intercept) বলে। সাধারণভাবে কোন সরলরেখা Y অক্ষকে $(0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করলে রেখাটির ছেদকে c (একটি ধ্রুব) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আবার $-x + 4y = 13$ রেখাটি X অক্ষের সঙ্গে ডানদিক থেকে $\angle PQO$ কোণ তৈরি করে। এই কোণের tangent মান নিলে তাকে $-x + 4y = 13$ এর ঢাল (slope) বলে। প্রদত্ত রেখাটির ঢাল

$$\tan \angle PQO = \frac{PO}{OQ} = \frac{13}{4} \div 13 = \frac{1}{4}$$

সাধারণভাবে, কোন সরল রেখা X অক্ষের সঙ্গে ডানদিক থেকে θ কোণ তৈরি করলে রেখাটির ঢাল $\tan\theta$ কে m দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

সরলরেখার সমীকরণ $-x + 4y = 13$ কে ঢাল এবং ছেদের সাহায্যে প্রকাশ করলে তা হবে $4y = x + 13 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$

সাধারণভাবে, ঢাল এবং ছেদের মাধ্যমে প্রকাশিত সরল রেখার সমীকরণের রূপ হচ্ছে,

$$y = mx + c$$

দুটি বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং (x_2, y_2) এর মধ্য দিয়ে অতিক্রান্ত সরল রেখার সাধারণ সমীকরণ $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ থেকে তার ঢাল ও ছেদের মান নির্ণয় করা যায় ঃ

সাধারণ সমীকরণটি রূপান্তরিত করলে

$$y = y_1 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1$$
$$= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \left(y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1\right)$$

$y = mx + c$ এর সঙ্গে তুলনা করলে

ঢাল $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ এবং ছেদ $c = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1$.

উল্লেখ্য যে কোন সমীকরণ সাধারণভাবে $ax + by + c = 0$ (যেখানে x এবং y দুটি চলক, a, b, c— তিনটি ধ্রুব) আকারে দেয়া থাকলে তার লেখচিত্র একটি সরলরেখা হয়। এই সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ সূচক 1 এবং এভাবে উপস্থাপিত সমীকরণকেই বলা হয় সরলরেখার সাধরণ সমীকরণ। সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ থেকে তার ঢাল ও ছেদ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নরূপ ;

$$ax + by + c = 0$$

বা, $by = -ax - c$

$\therefore\ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ $\quad\therefore$ ঢাল $= \frac{a}{b}$ এবং ছেদ $= -\frac{c}{b}$

সরলরেখার সমীকরণ $ax + by + 0 = 0$ বস্তুত দুটি চলক x এবং y এর পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ধারণ করে। এদের মধ্যে একটি (y) নির্ভরশীল চলক এবং অপরটি (x) স্বাধীন চলক হলে $ax + by + c = 0$ থেকে প্রাপ্ত $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ একটি অপেক্ষক প্রকাশ করে। আবার সমীকরণের $-\frac{a}{b} = m$ দ্বারা x-এর মান এক একক পরিবর্তিত হলে y এর মান কত খানি পরিবর্তিত হয় তা নির্দেশ করে (যেহেতু $-\frac{c}{b}$ একটি ধ্রুব)। স্থানাংক

মিতি এবং তার সাহায্যে নির্ধারিত সরলরেখার সমীকরণের এই বৈশিষ্ট্যটি ব্যবহারিক গণিতে বিশেষ উপযোগী।

১৪.১ A (-1, 2) এবং B(2, – 1) দুটি বিন্দু এবং $2x + 3y + 1 = 0$ একটি সরল রেখা দেয়া আছে। AB এবং $2x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ AB সরল রেখার সমীকরণটি হবে

$$y - 2 = \frac{-1 - 2}{2 - (-1)} [x - (-1)] \qquad \text{বা, } y - 2 = -x - 1$$
$$\text{বা, } x + y - 1 = 0$$

ধরা যাক $x + y - 1 = 0$ এবং $2x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে এবং বিন্দুটির স্থানাংক (x_1, y_1)। যেহেতু P বিন্দু উভয় রেখার উপর অবস্থিত, (x_1, y_1) হবে।

$x + y - 1 = 0 \ldots (1)$

$2x + 3y + 1 = 0 \ \ldots (2)$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান

$(1) \times 2 \Rightarrow 2x + 2y - 2 = 0$

$(2) \qquad \Rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$

বিয়োজনের মাধ্যমে $-y - 3 = 0 \quad \therefore y = -3$

(1) —এ $y = -3$ বসিয়ে $x - 3 - 1 = 0 \ \therefore \ x = 4$ অর্থাৎ ছেদবিন্দু (x_1, y_1) হবে $(4, -3)$

১৪.২ তিনটি সরলরেখা AB, CD এবং EF–এর সমীকরণ যথাক্রমে $11x - 10y - 13 = 0$, $17x - 8y = 35$ এবং $10x + 9y - 48 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে রেখা তিনটি পরস্পরকে একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

সমাধান ঃ AB এবং CD রেখাদ্বয় যদি P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে তবে P–এর স্থানাংক হবে $11x - 10y - 13 = 0$ এবং $17x - 8y = 35$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান অর্থাৎ (3, 2)। রেখা তিনটি পরস্পরকে একই বিন্দুতে ছেদ করলে EF রেখাও AB বা CD কে P বিন্দুতে ছেদ করবে অর্থাৎ P(3, 2) বিন্দুটিও EF

এর উপরে অবস্থিত হবে। P(3, 2) EF–এর উপরে অবস্থিত কিনা দেখার জন্য তার সমীকরণে $(10x + 9y - 48 = 0)$ $x = 3$ এবং $y = 2$ বসালে

$10.3 + 9.2 - 48 = 0$ বা $0 = 0$ অর্থাৎ $x = 3$, $y = 2$ মানদ্বয়ের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ। অতএব রেখা তিনটি P(3,2) বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

১৪.৩ একটি বিন্দু A এর স্থানাংক (2, 0), B বিন্দুর স্থানাংক (0, 3) এবং অপর একটি বিন্দু C X অক্ষের উপরে তবে মূলবিন্দুর বাম দিকে অবস্থিত। AC = 5 একক হলে ABC ত্রিভূজের তিনটি বাহুর সমীকরণ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ A বিন্দুর স্থানাংক = (2, 0)

B বিন্দুর স্থানাংক = (0, 3)

C বিন্দুর স্থানাংক = $(x_3, 0) = (-3, 0)$

(যেহেতু $AC = 5 \therefore 5 = \sqrt{(2 - x_3)^2 + (0 - 0)^2}$
$= 2 - x_3 \qquad \therefore x_3 = -3$)

ত্রিভূজের বাহুগুলির সমীকরণ হবে

AB–এর জন্য $y - 0 = \dfrac{0 - 3}{2 - 0}(x - 2)$ বা, $3x + 2y - 6 = 0$

BC–এর জন্য $y - 3 = \dfrac{3 - 0}{0 + 3}(x - 0)$ বা, $-x + y - 3 = 0$

CA–এর জন্য $y = 0$ (যেহেতু তা সম্পূর্ণরূপে x অক্ষের উপরে অবস্থিত)

এবং $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}[2(2 - 0) + 0(0 - 0) - 3(0 - 3)]$

$= 7\dfrac{1}{2}$ বর্গ একক

১৪.৪ X এবং Y দুটি সোজা রাস্তা পরস্পর সমকোণ তৈরি করে। এক ব্যক্তি X এবং Y রাস্তা থেকে যথাক্রমে 10 এবং 15 মিটার দূরে, অপর এক ব্যক্তি X এবং Y রাস্তা থেকে যথাক্রমে 15 এবং 10 মিটার দূরে দাঁড়িয়ে আছে। X রাস্তা থেকে 20 মিটার এবং Y রাস্তা থেকে 17.5 মিটার দূরে একটি বাড়িতে পৌঁছার জন্য দুজন একই সময়ে রওনা দিল। উভয়ের গতি সমান হলে কে আগে বাড়িটিতে পৌঁছতে পারবে? দুই ব্যক্তি এবং বাড়ীটি কি একই সরলরেখায় অবস্থান করছিল?

সমাধান ঃ রাস্তাদ্বয় সোজা এবং পরস্পরের সঙ্গে সমকোণ তৈরি করে বলে তাদের স্থানাংকমিতির X এবং Y অক্ষ হিসাবে ধরা যায়। প্রথম ব্যক্তির স্থানাংক হবে (15, 10) দ্বিতীয় ব্যক্তির স্থানাংক হবে (10, 15) এবং বাড়িটির স্থানাংক হবে (17.5, 20)

প্রথম ব্যক্তি থেকে বাড়িটির দূরত্ব $= \sqrt{(17.5 - 15)^2 + (20 - 10)^2}$

$= 10.3$ মিটার

দ্বিতীয় ব্যক্তি থেকে বাড়িটির দূরত্ব $= \sqrt{(17.5 - 10)^2 + (20 - 15)^2}$

$= 9$ মিটার।

বাড়িটি দ্বিতীয় ব্যক্তিরই বেশি নিকটে বলে দ্বিতীয় ব্যক্তিটি আগে পৌঁছতে পারবে।

দুই ব্যক্তি এবং বাড়িটি একই রেখায় অবস্থিত হলে তাদের অবস্থান বিন্দুত্রয় দ্বারা তৈরি ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে। বিন্দুত্রয় দ্বারা তৈরি ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[15(15 - 20) + 10(20 - 10) + 17.5(10 - 15)]$$

$$= (-)\,62.5 \neq 0$$

অতএব ব্যক্তিদ্বয় এবং বাড়িটি একই সরল রেখায় ছিল না।

১৪.৫ একটি কারখানা 12 লক্ষ টাকা বিনিয়োগ করে আয় করে 140,000 টাকা। বিনিয়োগের পরিমাণ 15 লক্ষ টাকা হলে আয়ের পরিমাণ 160,000 টাকা। বিনিয়োগ ও আয়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্ধারণ কর। 100,000 টাকা আয় করতে হলে কত টাকা বিনিয়োগ করতে হবে?

সমাধান ঃ ধরা যাক বিনিয়োগের পরিমাণ x এবং আয়ের পরিমাণ y। y x–এর উপরে নির্ভরশীল এবং এই নির্ভরশীলতার সম্পর্ককে $y = mx + c$ দ্বারা প্রকাশ করি, যেখানে m এবং c দুটি ধ্রুব।

শর্তানুযায়ী, $140000 = 1200000\ m + c$ ... (1)

এবং $160000 = 1500000\ m + c$ ... (2)

(1) এবং (2) সমাধান করে $m = \frac{1}{15}$; $c = 60000$

এবং বিনিয়োগ ও আয়ের সম্পর্ক

$$y = mx + c$$
$$= \frac{1}{15}x + 60000 \text{ বা, } 15y = x + 900000$$

আয়ের পরিমাণ 100000 টাকা হলে

$$100000 = \frac{1}{15}x + 60000 \qquad \therefore x = 600000$$

অর্থাৎ বিনিয়োগের পরিমাণ হতে হবে 6 লক্ষ টাকা।

১৪.৬ কারখানার মোট উৎপাদন ব্যয়ের একটি অংশ স্থিরীকৃত ব্যয় এবং অপর অংশ পরিবর্তনশীল ব্যয়। একটি কারখনা কোন পণ্যের 12 একক তৈরি করতে 6000 টাকা এবং 20 একক তৈরি করতে 9000 টাকা ব্যয় করলে কারখানাটির (ক) স্থিরীকৃত ব্যয়, (খ) প্রতি একক পণ্যের পরিবর্তনশীল ব্যয় এবং গ) 25 একক তৈরির ক্ষেত্রে একক প্রতি গড় মোট উৎপাদন ব্যয় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি উৎপাদনের পরিমাণ যখন x তখন মোট উৎপাদন ব্যয় y.

শর্তানুযায়ী, $x = 12$ হলে $y = 6000$

এবং $x = 20$ হলে $y = 9000$

x এবং y–এর মধ্যে সম্পর্ক রৈখিক হলে রেখাটি দুটি বিন্দু $(12,6000)$ এবং $(20,9000)$-এর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করবে এবং তার সমীকরণ হবে

$$y - 6000 = \frac{6000 - 9000}{12 - 20}(x - 12)$$

অর্থাৎ $y = 375x + 1500$ এটিই হবে উৎপাদনের পরিমাণ ও মোট উৎপাদন ব্যয়ের সম্পর্ক।

[অন্যভাবেও সম্পর্কটি নির্ধারণ করা যায়. ধরা যাক সম্পর্কটি $y = mx + c$

$\therefore \; 6000 = 12m + c$

$9000 = 20m + c$

যেখান থেকে $m = 375$ এবং $c = 1500$

$\therefore$ সম্পর্কের সমীকরণ $y = mx + c$ হবে $y = 375x + 1500$]

ক. $y = 375x + 1500$ সমীকরণে স্থিরীকৃত ব্যয় $c = 1500$ টাকা এবং

খ. একক প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয় = 375 টাকা।

গ. উৎপাদনের পরিমাণ $x = 25$ হলে মোট উৎপাদন ব্যয়

$$y = 375.25 + 1500$$
$$= 10875 \text{ টাকা।}$$

এবং গড় উৎপাদন ব্যয় $= \dfrac{10875}{25} = 435$ টাকা।

১৪.৭ বাংলাদেশ কৃষি উন্নয়ন সংস্থা ঢাকা থেকে দিনাজপুরে এক ট্রাক সার পৌঁছাতে 3500 টাকা ব্যয় করে। কুমিল্লায় এক ট্রাক সার পৌঁছানোর ব্যয় 2700 টাকা। ঢাকা থেকে চট্টগ্রামের দূরত্ব 250 কিলোমিটার হলে চট্টগ্রামে এক ট্রাক সার পৌঁছাতে কত ব্যয় হবে? (ঢাকা থেকে দিনাজপুরের দূরত্ব 425 কিলোমিটার, কুমিল্লার দূরত্ব 170 কিলোমিটার)।

সমাধান ঃ মনে করি পরিবহণ ব্যয় $= y$, দূরত্ব $= x$

ঢাকা–দিনাজপুরের জন্য $y = 3500$, $x = 425$

ঢাকা–কুমিল্লার জন্য $y = 2700$, $x = 170$

কিলোমিটার প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয় m এবং স্থিরীকৃত ব্যয় c হলে

$$3500 = 425m + c$$

এবং $$2700 = 170m + c$$

যেখান থেকে $m = 3\dfrac{7}{51} = 3.1373$ এবং $c = 2166\dfrac{34}{51} = 2166.6667$

$\therefore$ ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম পর্যন্ত এক ট্রাক সার পরিবহণের মোট ব্যয়

$$y = 250 \times 3.1373 + 2166.6667$$
$$= 784.325 + 2166.6667$$
$$= 2951 \text{ টাকা}$$

সমচ্ছেদ বিন্দু (Break even Point) ও সংশ্লিষ্ট বিশ্লেষণ ঃ

উৎপাদনের পরিমাণ এবং মোট উৎপাদন ব্যয়ের মধ্যে যেমন সম্পর্ক নির্ধারণ করা যায় তেমনি উৎপাদনের পরিমাণ ও তা বিক্রয় থেকে আয়ের পরিমাণের মধ্যেও সম্পর্ক নির্ণয় করা যায়। আবার বিক্রয়লব্ধ আয় (sales revenue) উৎপাদন ব্যয়ের (cost of production) বেশি হলে মোট মুনাফা (Gross Profit) অর্জিত হয়, বিক্রয়লব্ধ আয়

উৎপাদন ব্যয়ের কম হলে মোট লোকসান (Gross loss) হয়। বিক্রয়লব্ধ আয় এবং উৎপাদন ব্যয়ের সঙ্গে উৎপাদনের পরিমাণের যে সম্পর্ক নির্ধারিত থাকে তা থেকে উৎপাদনের পরিমাণের সঙ্গে মুনাফা বা লোকসানের পরিমাণের সম্পর্ক নির্ধারণ করা যায়। আবার এই সম্পর্ক থেকে উৎপাদনের এমন পরিমাণ নির্ধারণ করা যায় যা থেকে উৎপাদনকারী প্রতিষ্ঠানের মুনাফা বা লোকসান কিছুই হবে না। উৎপাদন ব্যয় এবং আয় সমচ্ছেদ বিশ্লেষণে কোন উৎপাদনকারী প্রতিষ্ঠানের বিন্দু বলতে উৎপাদনের এই পরিমাণকে বোঝায়। অর্থাৎ উৎপাদনের মোট পরিমাণ x, এককপ্রতি বিক্রয় মূল্য P, মোট উৎপাদন ব্যয় y হলে সমচ্ছেদ বিন্দু বলতে উৎপাদনের পরিমাণ x এর এমন মান বোঝায় যার জন্য

মোট বিক্রয়লব্ধ আয় Px = মোট উৎপাদন ব্যয় y

বা, $Px - y = 0$

বা, $y = Px$

যদি মোট উৎপাদন ব্যয় $y = mx + c$ হয় (যেখানে m উৎপাদিত পণ্যের একক প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয়, c = স্থিরীকৃত ব্যয়) তবে সমচ্ছেদ বিন্দুর জন্য

$mx + c = Px$

বা, $(m - P)x = -c \quad \therefore x = \dfrac{c}{P - m}$

অর্থাৎ সমচ্ছেদ বিন্দুতে উৎপাদনের পরিমাণ

$$= \frac{\text{স্থির ব্যয়}}{\text{একক প্রতি মূল্য — একক প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয়}}$$

আবার সমচ্ছেদ বিন্দুতে বিক্রয়ের পরিমাণ (মুনাফা বা লোকসান কোনটিই হবে না তেমন অবস্থার জন্য বিক্রয়ের পরিমাণ)

$$= \frac{\text{স্থিরীকৃত ব্যয়}}{1 - \text{প্রতি টাকা বিক্রয়ের (বিক্রয়লব্ধ আয়ের) জন্য পরিবর্তনশীল ব্যয়}}$$

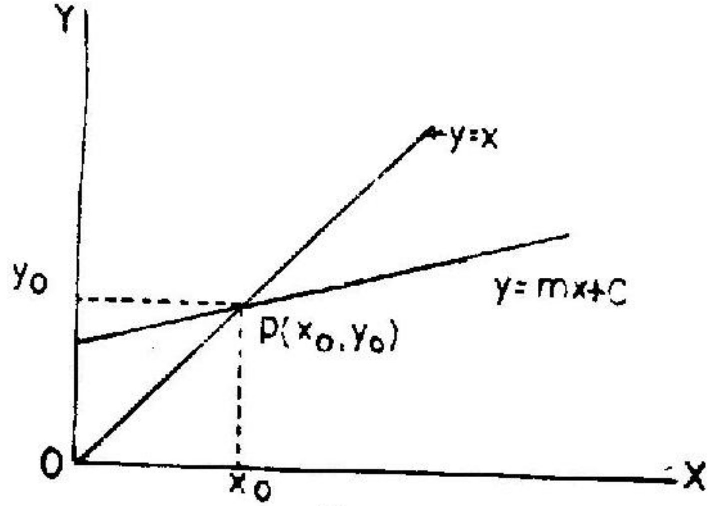
সমচ্ছেদ বিন্দুতে উৎপাদনের পরিমাণ (অর্থাৎ সমচ্ছেদ বিন্দু) নির্ণয়ের জন্য লেখচিত্র ব্যবহার করা যায়।

ধরা যাক y = বিক্রয়লব্ধ আয়ের পরিমাণ

x = উৎপাদনের পরিমাণ এবং প্রতি একক পণ্যের বিক্রয় মূল্য 1 টাকা।

সেক্ষেত্রে সমচ্ছেদ বিন্দুতে $y = x$

আবার উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক $y = mx + c$ যেখানে m একক প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয় এবং c স্থিরীকৃত ব্যয় ($y = mx + c$ সমীকরণে m = সমীকরণের ঢাল, c = সমীকরণের ছেদ)। লেখচিত্র $y = x$ এবং $y = mx + c$ আঁকা হল (m এবং c এর সম্ভাব্য যেকোন আনুমানিক মান গ্রহণ করে) ঃ



চিত্র ঃ ১৩

উৎপাদন ব্যয় আপেক্ষক $y = mx + c$ এবং আয় অপেক্ষক $y = x$ হলে সমচ্ছেদ বিন্দুতে উৎপাদন ব্যয় এবং বিক্রয়লব্ধ আয় সমান বলতে সমচ্ছেদ বিন্দুর জন্য $y = x$ এর বিন্দু নির্দেশ করে। লেখচিত্রে $P(x_0, y_0)$ বিন্দুটি হচ্ছে $y = x$ এবং $y = mx + c$ এর ছেদ বিন্দু। আয়ের পরিমাণ x_0 (∵ একক প্রতি বিক্রয় মূল্য 1 টাকা) তখন মুনাফা = আয় – ব্যয় = $x_0 - y_0$ কিন্তু x_0, y_0 বিন্দুটি $y = x$ রেখার উপর অবস্থিত বলে $x_0 = y_0$, এতএব উৎপাদনের পরিমাণ x_0 হলে মুনাফা = $x_0 - y_0 = x_0 - x_0 = 0$

∴ x_0 হচ্ছে সমচ্ছেদ বিন্দু।

১৪.৮ একটি কারখানার উৎপাদিত পণ্যসমূহের সম্ভাব্য বিক্রয়ের পরিমাণ 9000 টাকা। তার স্থিরীকৃত ব্যয় 1000 টাকা এবং মোট পরিবর্তনশীল ব্যয় 5400 টাকা। ক) কারখানাটির উৎপাদন ব্যয় ও বিক্রয়লব্ধ আয়ের সম্পর্ক নির্ধারণ কর, খ) উৎপাদনের

পরিমাণ (টাকায়) কত হলে মুনাফা বা লোকসান কোনটিই হবে না? প্রমাণ কর যে 6000 টাকার পণ্য বিক্রয় করে 1400 টাকা মুনাফা করা যাবে?

সমাধান ঃ ধরা যাক y = মোট উৎপাদন ব্যয়

m = প্রতি টাকা বিক্রয়ের জন্য পরিবর্তনশীল ব্যয়

x = মোট বিক্রয়লব্ধ আয়

c = স্থিরীকৃত ব্যয়

সেক্ষেত্রে উৎপাদন ব্যয় ও বিক্রয়লব্ধ আয়ের মধ্যে সম্পর্ক হবে

$$y = mx + c$$

শর্তানুযায়ী $m = \dfrac{\text{মোট পরিবর্তনশীল ব্যয়}}{\text{মোট বিক্রয়লব্ধ আয়}} = \dfrac{5400}{9000} = .6$

c = স্থিরীকৃত ব্যয় = 1000

উৎপাদন ব্যয় ও বিক্রয়লব্ধ আয়ের সম্পর্ক

$$y = mx + c$$

বা, $y = .6x + 1000$

খ) সমচ্ছেদ বিন্দুতে উৎপাদনের পরিমাণ

$$= \frac{\text{স্থিরীকৃত ব্যয়}}{1 - \text{প্রতি টাকা আয়ের জন্য পরিবর্তনশীল ব্যয়}}$$

$$= \frac{1000}{1 - .6} = 2500 \text{ টাকা।}$$

অর্থাৎ 2500 টাকা মূল্যের পণ্য উৎপাদন করলে মুনাফা বা লোকসান কোনটিই হবে না।

গ) বিক্রয়ের পরিমাণ 6000 টাকা হলে তার উৎপাদন ব্যয়

$y = 6000 \times .6 + 1000$

$= 4600$ টাকা।

$\therefore$ মুনাফা = মোট বিক্রয়মূল্য — মোট উৎপাদন ব্যয়

$= 6000 - 4600$

$= 1400$ টাকা।

১৪.৯ একটি আসবাবপত্র তৈরি কারখানার 20টি চেয়ার তৈরি করতে মোট 7000 টাকা এবং 30টি চেয়ার তৈরি করতে 9000 টাকা ব্যয় হয়। ক) প্রতিটি চেয়ারের বাজার মূল্য 250 টাকা হলে মুনাফা বা লোকসান কোনটিই হবে না এমন অবস্থার জন্য কারখানাটিকে কতগুলি চেয়ার তৈরি করতে হবে? (খ) কারখানাটি 75 টি চেয়ার তৈরি করে সেগুলির বিক্রি থেকে 2100 টাকা মুনাফা করতে চাইলে প্রতিটি চেয়ার কত টাকায় বিক্রয় করতে হবে? গ) বাজার মূল্যে বিক্রয় করলে 75টি চেয়ার বিক্রি থেকে মোট মুনাফা কত হবে?

সমাধান ঃ ধরা যাক $y = mx + c$ উৎপাদিত চেয়ারের সংখ্যা x এবং মোট উৎপাদন ব্যয় y এর মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে, যেখানে m চেয়ার প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয় এবং c স্থিরীকৃত ব্যয়।

ক) শর্তানুযায়ী $7000 = 20m + c$

এবং $9000 = 30m + c$ যেখান থেকে $m = 200$ টাকা

$c = 3000$ টাকা

প্রতিটি চেয়ারের বাজার মূল্য 250 টাকা হলে মোট বিক্রয়লব্ধ আয় $= 250x$ টাকা

এবং উৎপাদন ব্যয় $= mx + c$

$= 200x + 3000$

যখন মুনাফা কিংবা লোকসান কোনটিই হবে না তখন মোট বিক্রয়লব্ধ আয় = মোট উৎপাদন ব্যয় অর্থাৎ $250x = 200x + 3000 \quad \therefore \; x = 60$

অতএব মুনাফা কিংবা লোকসান কোনটিই হবে না এমন অবস্থার জন্য 60টি চেয়ার তৈরি করতে হবে।

(খ) ধরা যাক মোট 2100 টাকা মুনাফার জন্য প্রতিটি চেয়ারের বিক্রয়মূল্য $= p$ টাকা। সে ক্ষেত্রে 75টি চেয়ারের মোট বিক্রয়লব্ধ আয় $= 75p$ টাকা।

আবার 75টি চেয়ারের মোট উৎপাদন ব্যয় $= 200.75 + 3000$

$= 18000$

$\therefore \; 75p - 18000 = 2100 \Rightarrow p = \dfrac{2100 + 18000}{75} = 268$ টাকা।

(গ) বাজার মূল্যে বিক্রি করলে 75টি চেয়ারের মোট বিক্রয় মূল্য

$= 75 \times 250$

$= 18750$ টাকা।

আবার 75টি চেয়ারের উৎপাদন ব্যয় = 18000 টাকা

$\therefore$ মুনাফা = 18750 – 18000

= 750 টাকা।

১৪.১০ একক প্রতি 200 টাকা বাজার মূল্যের একটি পণ্যের 5000 একক উৎপাদন করলে একটি কারখানার মুনাফা বা লোকসান কোনটিই হয় না। পণ্যটির অতিরিক্ত এক একক উৎপাদন করতে 150 টাকা ব্যয় হলে কারখানাটির স্থিরীকৃত ব্যয়ের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ সমচ্ছেদ বিন্দুতে বিক্রয়ের পরিমাণ = উৎপাদন ব্যয়

$= 200 \times 5000$

$= 1000000$ টাকা।

$$\text{সমচ্ছেদ বিন্দু} = \frac{\text{স্থিরীকৃত ব্যয়}}{1 - \text{প্রতি টাকা বিক্রয়ের জন্য পরিবর্তনশীল ব্যয়}}$$

এখন মোট বিক্রয় = 1000000 টাকা

মোট পরিবর্তনশীল ব্যয় = $150 \times 5000 = 750000$

($\because$ একক প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয় = 150 টাকা)

$\therefore$ প্রতি টাকা বিক্রয়ের জন্য পরিবর্তনশীল ব্যয় = $\frac{750000}{1000000} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \text{সমচ্ছেদ বিন্দু} = \frac{\text{স্থিরীকৃত ব্যয়}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\text{বা, } 1000000 = \frac{\text{স্থিরীকৃত ব্যয়}}{\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ স্থিরকৃত ব্যয় = $\frac{1000000}{4} = 250000$ টাকা।

[অন্যভাবে সমাধান করলে, সমচ্ছেদ বিন্দুতে মোট আয় = মোট উৎপাদন ব্যয় = 1000000 টাকা।

এবং মোট উৎপাদন ব্যয় = মোট পরিবর্তনশীল ব্যয় + স্থিরীকৃত ব্যয়

বা $1000000 = 150 \times 5000 +$ স্থিরীকৃত ব্যয়

$\therefore$ স্থিরীকৃত ব্যয় = $1000000 - 15 \times 5000 = 250000$ টাকা]

অনুশীলনী — ১৪

১. প্রতি জোড়া বিন্দুর মধ্যে পারস্পরিক দূরত্ব নির্ণয় কর ;

ক) $(0, a)$; $(b, 0)$ খ) $(10, -2)$; $(-1, 9)$ গ) $(\frac{1}{3}, 4)$; $(3, -\frac{2}{3})$

২ $(x, -4)$ বিন্দুটি $(2, x)$ বিন্দু থেকে $3\sqrt{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত হলে x–এর মান কত ?

৩. $(0, 0)$, $(2, 4)$ এবং $(2, -1)$ বিন্দু তিনটি কোন ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে প্রমাণ কর যে ত্রিভূজটি সমকোণী।

৪. একটি ত্রিভূজের তিনটি শীর্ষবিন্দু $(1, 10)$, $(2, 1)$ এবং $(-7, 0)$ হলে ত্রিভূজটির লেখচিত্র অংকন কর এবং তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫. $(2, -4)$ এবং $(7, -9)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাকে $3 : 2$ অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

৬. y–এর মান কত হলে $(5, 3)$, $(10, 4)$ এবং $(-3, y)$ একই সরল রেখায় অবস্থান করবে ?

৭. একটি কারখানায় কোন পণ্যের উৎপাদন 3000 থেকে 5000 এককে উন্নীত করতে গেলে উৎপাদন ব্যয় 16000 টাকা থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 22000 টাকায় দাঁড়ায়। ক) উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণের সঙ্গে উৎপাদন ব্যয়ের সম্পর্ক নির্ণয় কর। খ) পণ্যটির 4000 একক উৎপাদন করতে মোট কত ব্যয় হবে ?

৮. একটি ছাত্রাবাসের মেস পরিচালনার জন্য স্থিরীকৃত ব্যয় এবং মেসের সদস্য সংখ্যা অনুযায়ী পরিবর্তনশীল ব্যয় মিলে মোট যত ব্যয় হয় তার পরিমাণ 25 জন সদস্যের জন্য 10000 টাকা এবং 30 জন সদস্যের জন্য 11600 টাকা হলে ক) স্থিরীকৃত ব্যয়ের পরিমাণ কত ? খ) 20 জন সদস্যের জন্য মোট ব্যয় কত ?

৯. একটি কারখানার স্থিরীকৃত ব্যয় 9000 টাকা। প্রতি একক পণ্যের জন্য পরিবর্তনশীল ব্যয় 20 টাকা। প্রতি একক পণ্যের বিক্রয়মূল্য 25 টাকা হলে কত একক পণ্য উৎপাদন করলে কারখানার মুনাফা বা লোকসান কোনটিই হবে না ? 5000 টাকা মুনাফা অর্জনের জন্য মোট কত একক পণ্য উৎপাদন করতে হবে ?

১০. প্রমাণ কর যে $y = 2 - \sqrt{3}x$, $y = \sqrt{3}x + 1$ এবং $y = 0$ তিনটি সরলরেখা দ্বারা তৈরি ত্রিভূজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

পঞ্চদশ অধ্যায়

রৈখিক প্রকল্পন

[LINEAR PROGRAMMING]

নির্দিষ্ট লক্ষ্য বা লক্ষ্যসমষ্টি (Objectives) বাস্তবায়নের জন্য প্রয়োজনীয় বিভিন্ন প্রকার উপাদানের সবচেয়ে সুবিধাজনক (Optimum) পরিমাণ নির্দিষ্ট পণ্য উৎপাদনের জন্য প্রয়োজনীয় সম্পদ (ভূমি, শ্রম, পুঁজি, যন্ত্রসরঞ্জাম, কাঁচামাল ইত্যাদি) ব্যবহারের পরিমাণ বিভিন্ন সমাবেশে (combination) হতে পারে। কিন্তু সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা অর্জনের জন্য কিংবা উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন পরিমাণ রাখার জন্য এসব সম্পদের পরিমাণের একটি নির্দিষ্ট সমাবেশই ব্যবহার প্রয়োজন। রৈখিক প্রকল্পন এই নির্দিষ্ট সমাবেশ নির্ধারণের একটি পদ্ধতি।

রৈখিক প্রকল্পন হচ্ছে বহুসংখ্যক স্বাধীন চলকের সমীকরণ এবং অসমতার সমষ্টি থেকে নির্ভরশীল চলকের সবচেয়ে সুবিধাজনক মানের জন্য স্বাধীন চলকসমূহের নির্দিষ্ট মান নির্ণয়ের একটি বিশেষ বীজগাণিতিক পদ্ধতি। একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝানো হল।

ধরা যাক, একটি কোম্পানি দুটি পণ্য A এবং B_1 উৎপাদন করে। পণ্যদ্বয়ের প্রতি একক উৎপাদনের জন্য কারখানার P, Q এবং R এই তিনটি ভিন্ন ভিন্ন বিভাগের প্রয়োজনীয় সময় (ঘণ্টায়), নির্দিষ্ট মেয়াদে (সপ্তাহ, মাস ইত্যাদি) বিভাগ তিনটি ব্যবহারের জন্য প্রাপ্ত সর্বোচ্চ সময় (শ্রম ঘণ্টায়, অর্থাৎ ঐ মেয়াদে বিভাগগুলি সব শিফট মিলে সর্বোচ্চ যত ঘণ্টা চালু থাকে তা এবং সংশ্লিষ্ট বিভাগে যতজন শ্রমিক কাজ করে তার গুণফল) এবং পণ্য দুটির প্রতি একক থেকে মুনাফার পরিমাণ (টাকায়) নিম্নরূপ ঃ

	বিভিন্ন বিভাগে প্রয়োজনীয় সময়			একক প্রতি মুনাফা
পণ্য	P	Q	R	
A	2	4	3	70
B	3	5	2	90

পণ্য	P	Q	R	
বিভাগের মোট কাজের সময়	720	1500	1000	

উপরের তথ্যসমূহ ব্যবহার করে A এবং B পণ্যদ্বয়ের প্রতিটির উৎপাদনের এমন পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে যাতে তাদের থেকে প্রাপ্ত মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হয়।

সমস্যাটিকে রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যা হিসাবে সাজানোর জন্য নিম্নলিখিত ধাপসমূহ প্রয়োগ করতে হবে ঃ

ক) ধরা যাক x_1 এবং x_2 যথাক্রমে A এবং B উপাদানের পরিমাণ এবং z = মোট মুনাফা।

খ) প্রদত্ত তথ্য ব্যবহার করে মুনাফা অপেক্ষক নির্ণয় করলে তা হবে $z = 70x_1 + 90x_2$

গ) P বিভাগে প্রয়োজনীয় মোট সময় $= 2x_1 + 3x_2$

Q বিভাগে প্রয়োজনীয় মোট সময় $= 4x_1 + 5x_2$

R বিভাগে প্রয়োজনীয় মোট সময় $= 3x_1 + 2x_2$

কিন্তু P, Q এবং R যথাক্রমে সর্বোচ্চ 720, 1500 এবং 1000 শ্রম ঘন্টা দিতে পারে। অতএব,

$$2x_1 - 3x_2 \le 720$$

$$4x_1 + 5x_2 \le 1500$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 1000$$

(ঘ) কারখানার উৎপাদিত পণ্যসমূহের পরিমাণ ঋণাত্মক হতে পারে না। অতএব $x_1 \ge 0$ এবং $x_2 \ge 0$

(ঙ) প্রাপ্ত সমীকরণ ও অসমতাসমূহ একত্রিত করলে সমস্যাটি নিম্নরূপ দাঁড়ায়।

দুটি চলক x_1 এবং x_2 এর এমন মান নির্ণয় কর যেন

$$2x_1 + 3x_2 \le 720$$

$$4x_1 + 5x_2 \le 1500$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 1000$$

এবং

$x_1, x_2 \geq$ থাকে এবং

$x = 70x_1 + 90x_2$ অপেক্ষকের মান সর্বোচ্চ হয়।

রৈখিক প্রকল্পন মডেলকে সাধারণভাবে নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায় ঃ

$x_1, x_2, \ldots x_n$ এর এমন মান নির্ণয় কর যেন

I $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nz_n$ এর মান সর্বোচ্চ (কিংবা সর্বনিম্ন) হয় যখন

II $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq (=$ অথবা $\geq) \; b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq (=$ অথবা $\geq) \; b_2$

.

.

.

.

$a_{m_1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq (=$ অথবা $\geq) \; b_n$

এবং

III $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

সমীকরণ I কে **অভীষ্ট অপেক্ষক** (Objective function) বলা হয়, অসমতার (বা সমীকরণের) সমষ্টি II কে বলা হয় **সীমাবদ্ধতা** (Constraints) এবং অসমতার সমষ্টি III কে বলা হয় অঋণাত্মক সীমাবদ্ধতা nonnegative constraints) বা **অঋণাত্মকতা** (non-negativity)।

রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যার সমাধানের দুটি পর্যায় থাকে ঃ প্রথম পর্যায়ে সম্ভাব্য সমাধানের (feasible solution) এলাকা নির্ণয় করা হয়। এ পর্যায়ে চলকসমূহের এমন সকল মান নির্ণয় করা হয় যেগুলি শুধু সীমাবদ্ধতাসমূহের শর্ত পূরণ করে। তবে সম্ভাব্য সমাধানসমূহের একটি নির্দিষ্ট সমাধানই অভীষ্ট অপেক্ষকের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান দিতে পারে। দ্বিতীয় পর্যায়ে এই নির্দিষ্ট মান অর্থাৎ সবচেয়ে সুবিধাজনক সমাধান (Optimum solution) নির্ধারণ করা হয়।

রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যাসমূহ সমাধানের প্রক্রিয়া দেখানোর আগে এখানে বিভিন্ন প্রকার সমস্যাকে রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যা হিসেবে সূত্রায়নের কয়েকটি উদাহরণ উপস্থাপন করা হল।

১৫.১ একটি কারখানা X এবং Y দুটি পণ্য উৎপাদন করে। প্রতিটি পণ্যের উৎপাদনের জন্য A, B এবং C উপাদানের কোনটি কত পরিমাণ প্রয়োজন এবং তাদের মোট মজুত

কত তার একটি তালিকা দেয়া আছে। তালিকায় প্রতিটি পণ্যের একক থেকে মুনাফার পরিমাণও দেয়া আছে ঃ

পণ্যের একক প্রতি বিভিন্ন উপাদানের পরিমাণ				একক প্রতি মুনাফা
পণ্য	A	B	C	
X	4	1	0	12
Y	2	1	3	9
মজুতের পরিমাণ	32	10	21	

রৈখিক প্রকল্পনের অভীষ্ট অপেক্ষক নির্ণয় কর। সমস্যাটিকে সূত্রায়িত কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমস্যায় একক প্রতি মুনাফা উল্লেখ করে অভীষ্ট অপেক্ষকটিকে মুনাফা অপেক্ষক হিসেবে নির্দেশ করা হয়েছে।

যেহেতু কারখানার লক্ষ্য তার মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ করা তাই সমস্যার অভীষ্ট অপেক্ষকটি হবে সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য X এবং Y পণ্যের উৎপাদনের পরিমাণ নির্ণয়। শর্ত থেকে, মোট মুনাফার পরিমাণ P হলে $P = 12X + 9Y$ অর্থাৎ অভীষ্ট অপেক্ষক হবে

$P = 12X + 9Y$ এর সর্বোচ্চ মানের জন্য X এবং Y এর মান নির্ণয়।

রৈখিক প্রকল্পন সমস্যার সীমাবদ্ধতা সমূহের জন্য

A উপাদান প্রয়োজন $4X + 2Y$ কিন্তু A, B এবং C এর

B উপাদান প্রয়োজন $X + Y$ মোট মজুত যথাক্রমে 32, 10

C উপাদান প্রয়োজন $3Y$ এবং 21 একক

অতএব সীমাবদ্ধতাসমূহ হবে $4X + 2Y \leq 32$

$X + Y \leq 10$

$3Y \leq 21$

এ ছাড়া অঋণাত্মকতার শর্ত $X \geq 0, \ Y \geq 0$

সুতরাং রৈখিক প্রকল্পণ সমস্যাটি হচ্ছে,

X এবং Y এর এমন মান নির্ণয় কর যেন

$P = 12X + 9Y$ এর মান সর্বোচ্চ হয়, যখন

$4X + 2Y \le 32$

$X + Y \le 10$

$3Y \le 21$

এবং $X, Y \ge 0$

১৫.২ একটি কারখানার মিলিং যন্ত্র, লেদ যন্ত্র এবং গ্রাইন্ডার যন্ত্র সপ্তাহে যথাক্রমে 150, 100 এবং 50 যন্ত্র ঘন্টা অব্যবহৃত থাকায় A, B এবং C তিনটি নতুন পণ্য উৎপাদনের সিদ্ধান্ত নেয়া হল। দেখা গেল যে প্রতিটি পণ্যের এক একক উৎপাদনের জন্য যন্ত্রসমূহের প্রয়োজনীয় সময় নিম্নরূপ ঃ

	পণ্যের এক এককের জন্য সময়		
যন্ত্র	A	B	C
মিলিং	7	2	2
লেদ	3	2	1
গ্রাইন্ডার	2	0	1

A, B এবং C এর বিক্রি থেকে একক প্রতি মুনাফা যথাক্রমে 15, 10 এবং 7 টাকা হলে সর্বোচ্চ মুনাফা প্রাপ্তির জন্য রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যা সূত্রায়িত কর।

সমাধান ঃ মনে করি A পণ্যের x একক, B পণ্যের y একক এবং C পণ্যের z একক উৎপন্ন করে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন করতে হবে। সেক্ষেত্রে অভীষ্ট অপেক্ষক হবে

$P = 15x + 10y + 7z$ এর মান সর্বোচ্চকরণ যেখানে $P =$ মুনাফা।

আবার A পণ্যের x একক B পণ্যের y একক এবং C পণ্যের z একক উৎপন্ন করতে মিলিং যন্ত্রের মোট সময় লাগবে $7x + 2y + 2z$, কিন্তু ব্যবহারের জন্য মিলিং যন্ত্র দিতে পারে 150 ঘন্টা।

$\therefore$ মিলিং যন্ত্রের সীমাবদ্ধতা হবে $7x + 2y + 2z \le 150$, অনুরূপভাবে লেদ ও গ্রাইন্ডার যন্ত্রের সীমাবদ্ধতা হবে $3x + 2y + z \le 100$ এবং

$2x + z \le 50$

এছাড়া উৎপাদনের পরিমাণ $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

অতএব রৈখিক প্রকল্পন এর সমস্যাটি হবে,

x, y এবং z এর এমন মান নির্ণয় কর যেন

$P = 15x + 10y + 7z$–এর মান সর্বোচ্চ হয়, যখন

$7x + 2y + 2z \leq 150$

$3x + 2y + z \leq 100$

$2x + z \leq 50$

এবং $x, y, z \geq 0$

১৫.৩ একটি পরিবারের সদস্যদের দৈনিক খাদ্য তালিকা এমন হওয়া উচিত যেন তাদের মধ্যে A, B এবং C ভিটামিনের সর্বনিম্ন পরিমাণ যথাক্রমে 35, 25 এবং 15 একক হয়। পরিবারটি এই পরিমাণ ভিটামিন সরবরাহ নিশ্চিত করার জন্য P এবং Q দু'প্রকারের খাদ্যের উপর নির্ভর করে। P–এর প্রতি গ্রামে A, B এবং C ভিটামিনের পরিমাণ যথাক্রমে 6, 5 এবং 2 একক এবং Q–এর প্রতি গ্রামে এই ভিটামিনসমূহের পরিমাণ যথাক্রমে 2, 3 এবং 7 একক। P–এর গ্রামপ্রতি মূল্য 3 টাকা এবং Q–এর গ্রাম প্রতি মূল্য 2 টাকা। প্রতিদিন কতগ্রাম P এবং কতগ্রাম Q কিনলে পরিবারটির ভিটামিন চাহিদা পূর্ণ হবে এবং তার জন্য ব্যয় সর্বনিম্ন পরিমাণ হবে? (সমস্যাটিকে শুধু সূত্রায়িত কর)।

সমাধান ঃ ধরা যাক x_1 গ্রাম P এবং x_2 গ্রাম Q কিনলে হবে। তাদের মোট মূল্য $3x_1 + 2x_2 = z$ হলে

$z = 3x_1 + 2x_2$ অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান পেতে হবে।

x_1 গ্রাম P খাদ্য এবং x_2 গ্রাম Q খাদ্য

মোট A ভিটামিন দেয় $6x_1 + 2x_2$

B ভিটামিন দেয় $5x_1 + 3x_2$

C ভিটামিন দেয় $2x_1 + 7x_2$

A, B এবং C ভিটামিন প্রয়োজন সর্বনিম্ন 35, 25 এবং 15 একক অতএব ভিটামিনের জন্য সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ হবে

$6x_1 + 2x_2 \geq 35$

$5x_1 + 3x_2 \geq 25$

$2x_1 + 7x_2 \geq 15$

এবং খাদ্যের পরিমাণ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

অতএব সমস্যাটি সূত্রায়িত করলে, x_1 এবং x_2–এর এমন পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে যেন $z = 3x_1 + 2x_2$ সর্বনিম্ন হয়, যখন

$6x_1 + 2x_2 \geq 35$

$5x_1 + 3x_2 \geq 25$

$2x_1 + 7x_2 \geq 15$

এবং

$x_1, x_2 \geq 0$

রৈখিক প্রকল্পনের সমাধান

রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যাসমূহ সমাধানের একটি সহজ পদ্ধতি হচ্ছে লেখচিত্র পদ্ধতি (graphic method)। সিমপ্লেক্স পদ্ধতি (Simplex method) নামে পরিচিত অপর একটি পদ্ধতি অধিকতর বিজ্ঞানসম্মত কেননা লেখচিত্র পদ্ধতিতে দুটি মাত্র স্বাধীন চলকের রৈখিক প্রকল্পন সমস্যা সমাধান করা যায় কিন্তু সিমপ্লেক্স পদ্ধতি প্রয়োগের ক্ষেত্র সর্বজনীন। স্বাধীন চলকের সংখ্যা দুয়ের অধিক যত বেশিই হোক না কেন, সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে সমাধান পাওয়া সম্ভব। সিমপ্লেক্স পদ্ধতি বস্তুত বিভিন্ন চলকের সহগসমূহের তালিকায় কৌণিক মানসমূহ পরীক্ষার একটি বিধিবদ্ধ গণনা পদ্ধতি (algorithm)। বর্তমান গ্রন্থে রৈখিক প্রকল্পনের প্রাথমিক আলোচনা উপস্থাপিত হল বলে শুধু লেখচিত্র পদ্ধতিটিই ব্যাখ্যা করা হল।

লেখচিত্র পদ্ধতিতে রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যা সমাধানের প্রধান ধাপসমূহ হচ্ছে ঃ

ক) রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যাকে সূত্রায়িত করা ;

খ) সীমাবদ্ধতার অসমতাসমূহকে সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা করা এবং তাদের প্রতিটির জন্য লেখচিত্র আঁকা (লেখচিত্রগুলি এককেকটি সরল রেখা হবে) ;

গ) স্বাধীন চলকসমূহের সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকা নির্ধারণ করা (সীমাবদ্ধতার অসমতাসমূহ যদি $\leq$ চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকা হবে অঙ্কিত সরল রেখাসমূহের সবকটির নিচের প্রথম চতুর্ভাগের এলাকা আর যদি $\geq$ চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকা হবে সরল রেখাসমূহের সবকটির উপরের প্রথম চতুর্ভাগের এলাকা) ;

ঘ) সম্ভাব্য মানসমূহের এলাকার কৌণিক বিন্দুসমূহের জন্য চলকগুলির যে মান পাওয়া যায় সেগুলি অভীষ্ট অপেক্ষকে বসিয়ে তার সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান পরীক্ষা করা। যেসব মানের জন্য অভীষ্ট অপেক্ষকের মান সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন সেগুলিই হবে উদ্দিষ্ট সমাধান।

১৫.৪ একটি কারখানা A এবং B দুটি পণ্য উৎপাদন করে। A পণ্যের প্রতি একক উৎপাদনে কারখানার দুটি বিভাগের প্রথমটিতে 2 এবং দ্বিতীয়টিতে 4 ঘণ্টা সময় ব্যয় হয় আর B পণ্যের প্রতি একক উৎপাদনে প্রথমটিতে 2.5 এবং দ্বিতীয়টিতে 2 ঘণ্টা সময় ব্যয় হয়। প্রথম ও দ্বিতীয় বিভাগে সপ্তাহে যথাক্রমে 60 ও 70 ঘন্টা কাজ চালু থাকলে এবং A ও B পণ্যের থেকে একক প্রতি মুনাফা যথাক্রমে 4 টাকা এবং 3 টাকা হলে পণ্যদ্বয়ের কত একক করে উৎপাদন করলে কারখানাটির মুনাফা সর্বোচ্চ হবে?

সমাধান ঃ রৈখিক প্রকল্পনের সমস্যাটি হবে ঃ

x_1 এবং x_2-এর এমন মান নির্ণয় করতে হবে যেন

$2x_1 + 2.5x_2 \leq 60$

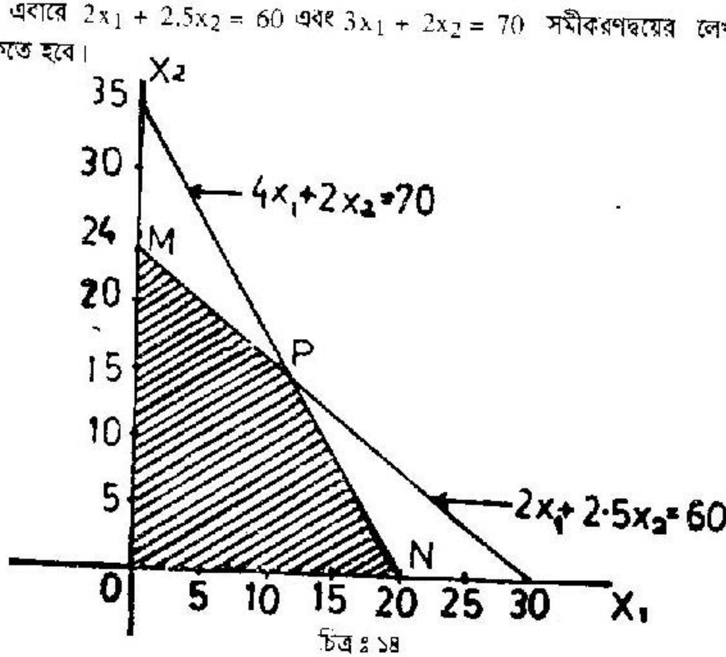
$4x_1 + 2x_2 \leq 70$

$x_1, x_2 \geq 0$ হয় এবং

$z = 4x_1 + 3x_2$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।

(x_1, x_2–যথাক্রমে A এবং B এর পরিমাণ, z = মোট মুনাফা)

এবারে $2x_1 + 2.5x_2 = 60$ এবং $3x_1 + 2x_2 = 70$ সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র আঁকতে হবে।



চিত্র ঃ ১৪

লেখচিত্রে রেখাবৃত অংশটি হচ্ছে সম্ভাব্য সমাধানের এলাকা কেননা এ এলাকার সকল বিন্দুর জন্যই x_1 এবং x_2 এর মানের ক্ষেত্রে $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $2x_1 + 2.5x_2 \leq 60$ এবং $4x_1 + 2x_2 \leq 70$। কিন্তু $4x_1 + 3x_2$–এর মান সর্বোচ্চ হবে সম্ভাব্য এলাকার চারটি কৌণিক বিন্দু 0, M, P এবং N–এর যেকোন একটিতে।

0 বিন্দুতে x_1 এবং x_2–এর মান (0, 0) $\therefore$ $z = 4.0 + 3.0 = 0$;

M বিন্দুতে x_1 এবং x_2 এর মান X_2 অক্ষ এবং $2x_1 + 2.5x_2 = 60$ এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ (0, 24) $\therefore$ $z = 4.0 + 3.24 = 72$;

P বিন্দুতে x_1 এবং x_2–এর মান $4x_1 + 2x_2 = 70$ এবং $2x_1 + 2.5x_2 = 60$ এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ $\left(\frac{55}{6}, \frac{50}{3}\right)$ $\therefore$ $z = 4.\frac{55}{6} + 3.\frac{50}{3}$

$$= 86\frac{2}{3}$$

N বিন্দুতে x_1 এবং x_2 এর মান X_1 অক্ষ এবং $4x_1 + 2x_2 = 70$ এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ (20, 0) $\therefore$ $z = 4.20 + 3.0 = 80$

কৌণিক বিন্দুসমূহ পর্যবেক্ষণে দেখা যায় যে P বিন্দুতে $4x_1 + 3x_2 = z$–এর মান সর্বোচ্চ। P বিন্দুতে

$$x_1 = \frac{55}{6} = 9 \text{ (আনুমানিক)}$$

$$x_2 = \frac{50}{3} = 17 \text{ (আনুমানিক)}$$

অতএব প্রদত্ত শর্ত ও সীমাবদ্ধতাসমূহ সাপেক্ষে কারখানাটির সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য A পণ্যটি উৎপাদন করতে হবে 9 একক এবং B পণ্যটি উৎপাদন করতে হবে 17 একক।

১৫.৫ উদাহরণ ১৫.১ এর সমস্যাটির রৈখিক প্রকল্পনের রূপ দেয়া হল :

$$4X + 2Y \leq 32$$

$$X + Y < 10$$

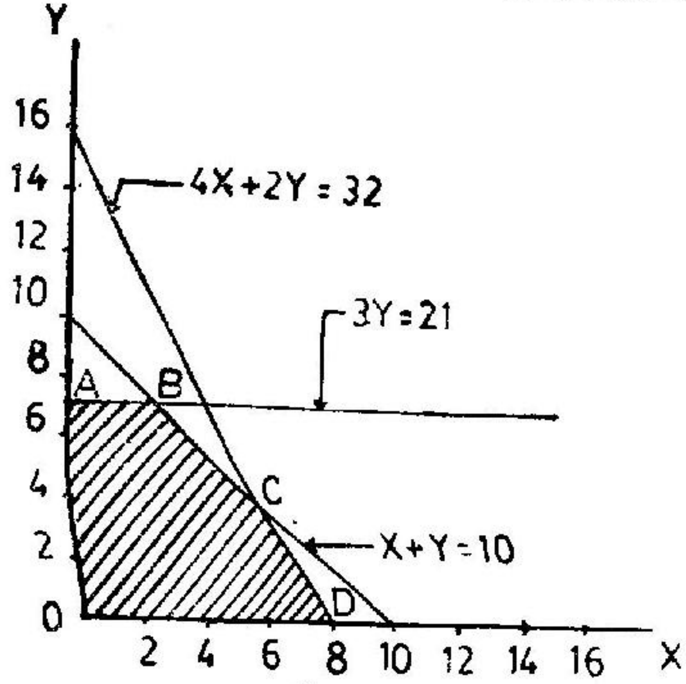
$$3Y \leq 21$$

$X, Y > 0$ সীমাবদ্ধতাসমূহ সাপেক্ষে

$P = 12X + 9Y$ এর মান সর্বোচ্চ করতে হলে

X এবং Y এর মান কত?

সমাধান ঃ $4X + 2Y = 32$, $X + Y = 10$ এবং $3Y = 21$ এর লেখচিত্র আঁকতে হবে।



চিত্র ঃ ১৫

রেখাবৃত OABCD ক্ষেত্রটি হচ্ছে সম্ভাব্য সমাধানের এলাকা।

0 বিন্দুতে $X = 0$, $Y = 0$, $P = 12.0 + 9.0 = 0$

A বিন্দুতে $X = 0$, $Y = 7$, $P = 12.0 + 9.7 = 63$

B বিন্দুতে $X = 3$, $Y = 7$, $P = 12.3 + 9.7 = 99$

C বিন্দুতে $X = 6$, $Y = 4$ $P = 12.6 + 9.4 = 108$

D বিন্দুতে $X = 8$, $Y = 0$, $P = 12.8 + 9.0 = 96$

অতএব, সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য সবচেয়ে সুবিধাজনক উৎপাদন বিন্দু C যেখানে $X = 6$, $Y = 4$ অর্থাৎ সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য X পণ্যের 6 একক এবং Y পণ্যের 4 একক উৎপাদন করতে হবে।

১৫.৬ একটি প্রতিষ্ঠান তার পণ্যসমূহের প্রচারের জন্য দুটি মাধ্যম বেতার এবং টেলিভিশন ব্যবহার করে। টেলিভিশনে একটি প্রচার অনুষ্ঠানের ব্যয় 10,000 টাকা এবং তার সাহায্যে 20,000 ক্রেতার নিকট প্রচার চালানো যায় যাদের মধ্যে 10,000 ব্যক্তির বার্ষিক সঞ্চয় 25,000 টাকার উর্ধে এবং 4,000 ব্যক্তি অবিবাহিত। বেতার মাধ্যমে একটি প্রচার অনুষ্ঠানের ব্যয় 6,000 টাকা এবং তার সাহায্যে 10,000 ক্রেতার নিকট প্রচার চালানো যায় যাদের সকলেরই বার্ষিক সঞ্চয় 25,000 টাকার উর্দ্ধে এবং 8,000 জন অবিবাহিত। অন্তত 100,000 ব্যক্তির নিকট প্রচার চালাতে হলে যাদের অন্তত 40,000 জন অবিবাহিত, টেলিভিশন ও বেতারের কোনটিতে কতটি প্রচার অনুষ্ঠান আয়োজন করলে প্রচারণা ব্যয় সর্বনিম্ন হবে?

সমাধান ঃ ধরা যাক বেতারে প্রচারণার সংখ্যা $= x_1$ এবং টেলিভিশনে প্রচারণার সংখ্যা $= x_2$

মোট প্রচারণা ব্যয় $6000x_1 + 10000x_2$ সর্বনিম্ন করতে হবে। সীমাবদ্ধতার অসমতাসমূহ নিম্নরূপ ঃ

যাদের নিকট প্রচার করা হবে তাদের সংখ্যা

$10000x_1 + 20000x_2 \geq 100,000$। এদের মধ্যে বার্ষিক সঞ্চয় যাদের 25000 টাকার উর্ধে তাদের সংখ্যা

$$10000x_1 + 10000x_2 \geq 80000$$

এবং অবিবাহিতদের সংখ্যা $8000x_1 + 4000x_1 \geq 40000$

এছাড়া $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

সীমাবদ্ধতার অসমতাসমূহকে সমীকরণ ধরলে সেগুলি হবে

$$10000x_1 + 20000x_2 = 100000 \ldots (1)$$

$$10000x_1 + 10000x_2 = 80000 \ldots (2)$$

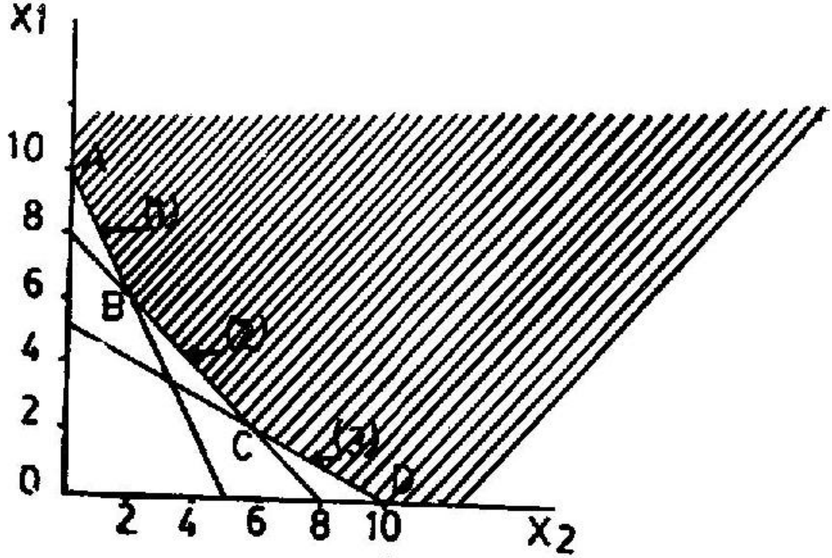
$$8000x_1 + 4000x_2 = 40000 \ldots (3)$$

লেখচিত্র আঁকার জন্য সমীকরণসমূহকে সমতুল্য সমীকরণে রূপান্তরিত করলে,

$$x_1 + 2x_2 = 10 \ldots (1)$$

$$x_1 + x_2 = 8 \ldots (2)$$

$2x_1 + x_2 = 10$ (3) এবং তাদের লেখচিত্র



চিত্র ঃ ১৬

রেখাবৃত এলাকাটি হচ্ছে সম্ভাব্য সমাধানের এলাকা (উপরের দিকে উন্মুক্ত)। তার কৌণিক বিন্দুসমূহ হচ্ছে A, B, C এবং D।

A বিন্দুতে $x_1 = 10$, $x_2 = 0$

$\therefore$ প্রচারণা ব্যয় $= 6000x_1 + 10000x_2 = 60000$

B বিন্দুতে $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ $\therefore$ প্রচারণা ব্যয় $= 6000.6 + 10000.2$

$= 56000$

C বিন্দুতে $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ $\therefore$ প্রচারণা ব্যয় $= 6000.2 + 10000.6$

$= 72000$

D বিন্দুতে $x_1 = 0$ $x_2 = 10$ $\therefore$ প্রচারণা ব্যয় $= 6000.0 + 10000.10$

$= 100000$

অতএব প্রচারণা ব্যয় B বিন্দুতে সর্বনিম্ন যেখানে $x_1 = 6$. $x_2 = 2$

অর্থাৎ প্রদত্ত শর্তসমূহ পুরণ করে প্রচারণা ব্যয় সর্বনিম্ন করতে হলে রেডিওতে প্রচারানুষ্ঠানের সংখ্যা হবে 6 এবং টেলিভিশনে প্রচারানুষ্ঠানের সংখ্যা হবে 2।

অনুশীলনী – ১৫

১. রৈখিক প্রকল্পন সম্পর্কে ধারণা দাও। রৈখিক প্রকল্পনের অভীষ্ট অপেক্ষক, সীমাবদ্ধতা এবং অঋণাত্মকতা বলতে কি বুঝায়?

২. রৈখিক প্রকল্পনের সম্ভাব্য সমাধান এবং সবচেয়ে সুবিধাজনক সমাধানের ব্যাখ্যা দাও।

৩. রৈখিক প্রকল্পনের সমাধান কিভাবে করা যায়? লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধানের প্রক্রিয়াটি ব্যাখ্যা কর।

৪. একটি কারখানায় দুটি পণ্য X এবং Y উৎপাদনের সিদ্ধান্ত নেয়া হল। পণ্য দুটি তৈরির জন্য কারখানার A এবং B বিভাগকে নিয়োজিত করতে হবে। A বিভাগ সপ্তাহে সর্বমোট 480 শ্রমঘন্টা এবং B বিভাগ সর্বমোট 300 শ্রম ঘন্টা চালু থাকে। X পণ্যের প্রতি এককের জন্য A বিভাগে 10 ঘন্টা এবং B বিভাগে 5 ঘন্টা সময় লাগে আর Y পণ্যের প্রতি এককের জন্য A বিভাগে 6 ঘন্টা এবং B বিভাগে 4 ঘন্টা লাগে। X এবং Y পণ্য থেকে একক প্রতি মুনাফা যথাক্রমে 12 এবং 8 মুদ্রা একক হলে কারখানাটির জন্য সপ্তাহে কত একক X এবং কত একক Y উৎপাদনের পরিকল্পনা করা সর্বোত্তম? সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ কত?

৫. একটি রৈখিক প্রকল্পন সমস্যা দেয়া আছে ঃ

x_1 এবং x_2–এর এমন মান নির্ণয় কর যেন

$z = 3x_1 + 4x_2$ এর মান সর্বোচ্চ হয় যখন

$4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$2x_1 + 5x_2 \leq 180$

এবং $x_1, x_2 \geq 0$

লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান করে সম্ভাব্য সমাধানের এলাকা দেখাও। সবচেয়ে সুবিধাজনক সমাধান নির্ণয় কর।

৬. একটি ছোট আসবাবপত্র তৈরি কারখানায় শুধু চেয়ার ও টেবিল তৈরি হয়। চেয়ার প্রতি মুনাফার পরিমাণ 20 টাকা এবং টেবিল প্রতি মুনাফার পরিমাণ 30 টাকা। দুটি বস্তু প্রস্তুতেই তিনটি যন্ত্র M_1, M_2, M_3 প্রয়োজন। বিভিন্ন যন্ত্রে বস্তুটির

প্রয়োজনীয় সময় এবং যন্ত্রগুলি ব্যবহারের জন্য প্রাপ্তব্য সপ্তাহের নির্ধারিত মোট সময় নিচের তালিকায় দেয়া হল ঃ

	সময় (ঘণ্টায়)		যন্ত্রের মোট
যন্ত্র	চেয়ার	টেবিল	কাজের সময়
M_1	3	3	36
M_2	5	2	50
M_3	2	6	60

কারখানার জন্য সপ্তাহে মোট কতটি চেয়ার এবং কতটি টেবিল উৎপাদন করা সবচেয়ে লাভজনক? সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ কত?

৭. একটি পানীয় তৈরি কারখানার দুটি শাখা X এবং Y উভয়েই ফান্টা, কোক এবং সেভেন–আপ বোতলজাত করে। শাখা দুটির দৈনিক বোতল উৎপাদন ক্ষমতা নিম্নরূপ ঃ

	ফান্টা	কোক	সেভেন–আপ
X	3000	1000	2000
Y	1000	1000	6000

ফান্টার মাসিক চাহিদা 24000 বোতল, কোকের 16000 বোতল এবং সেভেন–আপ এর 48000 বোতল। X এবং Y শাখার দৈনিক কার্যচালনা ব্যয় যথাক্রমে 600 ও 400 টাকা। মাসে কারখানার কোন শাখা কত দিন চালু রাখলে তা সর্বনিম্ন কার্যচালনা ব্যয়ে পানীয়ের মাসিক চাহিদা পূরণ করবে?

৮. এক গ্রাম X খাদ্যে A ভিটামিন 6 একক এবং B ভিটামিন 7 একক। এক গ্রাম Y খাদ্যে A ভিটামিন 8 একক এবং B ভিটামিন 12 একক। X এবং Y খাদ্যের গ্রাম প্রতি মূল্য যথাক্রমে 0.12 টাকা এবং 0.20 টাকা। কোন ব্যক্তির সুসম খাদ্যের জন্য দৈনিক মোট 100 একক ভিটামিন A এবং 120 একক ভিটামিন B প্রয়োজন হলে তাকে প্রয়োজনীয় ভিটামিন চাহিদা পূরণের জন্য X এবং Y খাদ্যে সর্বনিম্ন মোট কত পরিমাণ টাকা ব্যয় করতে হবে?

পরিশিষ্ট

ব্যবহৃত সাংকেতিক চিহ্নসমূহ

$=$	সমান
$\neq$	সমান নয়
$\equiv$	সমতুল্য
$\rightarrow$	দিকে ঝোঁকে
$>$	বৃহত্তর
$<$	ক্ষুদ্রতর
$\not>$	বৃহত্তর নয়
$\not<$	ক্ষুদ্রতর নয়
$\geq$	বৃহত্তর অথবা সমান
$\leq$	ক্ষুদ্রতর অথবা সমান
$\Rightarrow$	যেখান থেকে
$\in$	–এর উপাদান
$\notin$	–এর উপাদান নয়
$\subseteq$	উপসমাহার
$\cup$	যোজন
$\cap$	ছেদন
i	কাল্পনিক সংখ্যা $(=\sqrt{-1})$
$n!$	গৌণিক n
$l\,n$	স্বাভাবিক সংবর্গমান
log	সাধারণ বর্গমান
$\sqrt{\ }$	বর্গমূল
$\frac{d}{dx}$	x–এর তুলনায় অন্তরীকরণ
$\int$	সমাকলন
Σ	যোগফল (গ্রীক অক্ষর সিগমা)
( )	প্রথম বন্ধনী
{ }	দ্বিতীয় বন্ধনী
[ ]	তৃতীয় বন্ধনী
$\emptyset$	শূন্য সমাহার
Δ	মূলের বৈশিষ্ট্য নির্ণায়ক (Determinant) গ্রীক অক্ষর ডেল্টা

ব্যবহৃত গ্রীক বর্ণসমূহ
(ছোট হাতের)

α	আলফা
β	বেটা
γ	গামা
δ	ডেলটা
$\in$	এপসিলন
η	ইটা
θ	থিটা
λ	ল্যামডা
μ	মিউ
π	পাই
ρ	রো
ϕ	ফাই
ψ	সাই

কয়েকটি ধ্রুবের মান

$\pi = 3.14159$

$e = 2.7128$

$\log_{10}^{e} = 0.43429$

$\log_{e}^{10}\ 2.30258$

উত্তরমালা

অনুশীলনী - ১

১. ক) মিথ্যা খ) মিথ্যা গ) সত্য ঘ) মিথ্যা ঙ) মিথ্যা

২. ক) মূলদ কিংবা অমূলদ খ) মূলদ গ) $x > y$ ঘ) $x^2 < x$ ঙ) কাল্পনিক

৩. ক) সত্য খ) সত্য গ) সত্য ঘ) মিথ্যা ঙ) মিথ্যা

৪. ক) $x = -1$, $y = -4$ খ) $x = 4$, $y = 4$ গ) $x = 16$, $y = -6$ ঘ) $x = \frac{7}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$ ঙ) $x = 3$, $y = 1$

অনুশীলনী - ২

১. ক) ঠিক খ) ঠিক গ) ঠিক নয়; $3^8 \neq 9^3$ ঘ) ঠিক ঙ) ঠিক নয়, $p^{-1} < q^{-1}$

২. ক) $\frac{1}{x^6}$ খ) $\frac{8}{49}$ গ) 6 ঘ) 8 ঙ) $\frac{1}{3}$

১০. ক), খ) এবং গ) করণী নয়

১১. ক) $\frac{203}{9}\sqrt{3}$ খ) $6\sqrt{5} - 7\sqrt{3} + \frac{17}{2}\sqrt{2}$ গ) $16 - \sqrt{3}$ ঘ) 3

১২. 289 ১৩. 0.504 ১৪. $\sqrt{6}$ ১৫. 41 ১৬. ক) 1154 খ) $2\sqrt{2}$ গ) 2 ১৭. 180

১৮. ক) $4 - \sqrt{3}$ খ) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3} - 1)$ গ) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ ১৯. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

অনুশীলনী – ৩

৭. ক) মিথ্যা খ) মিথ্যা গ) মিথ্যা ঘ) সত্য ঙ) মিথ্যা চ) সত্য ছ) মিথ্যা

৮. $P = \{a, b, c, d\}$; $Q = \{b, c, e, f\}$; $R = \{a, d, e, f\}$

৯. ক) $\{2, 4, 6, 8, 10, 14, 22\}$; খ) $\{2, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 22\}$; গ) $\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20\}$ ঘ) $\{2, 6, 22\}$; ঙ) $\{8, 14\}$ চ) $\{10, 14\}$ ছ) $\{18\}$; জ) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 22\}$ ঝ) $\{2, 6, 8, 10, 14, 22\}$ ঞ) $\{14\}$

১০. সংকেত : $P \cap Q = \{8, 14\}$; $P' = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13\}$

$Q' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13\}$

$R' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}$

১১. 19 ১২. 15 ১৩. ক) 22 খ) 40 গ) 10

১৪. $A \cup B \cup C \neq 100$, তথ্যসমূহ ভ্রান্তিপূর্ণ বলে ব্যবহারের অনুপযুক্ত

১৫. ক) 90 খ) 75

অনুশীলনী - ৪

৬. ক) $\frac{a+1}{a+2}$; খ) $\frac{1}{4}$ গ) 3, 12 ঘ) 4, 480 ঙ) $x = -1$, $y = 1$

চ) $x = -\frac{11}{5}$; $y = \frac{15}{7}$

ছ) $x = \frac{11}{7}$; $y = 1$; $z = -\frac{5}{7}$

জ) $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$; $x = 0$; $y = \frac{1}{2}$; $y = -1$

ঝ) $x = \pm\frac{\sqrt{11}}{11}i$; $y = \pm i$;

$x = \pm\frac{3\sqrt{11}}{11}i$; $y = \pm i$

ঞ) $\pm\frac{3}{2}$

৭. $d = 50t + 10$ ৮. $p = 4, D = S = 16$; ৯. 1800, 1200

১০. 8, 9 ১১. $2\frac{12}{19}$

১২. $m = -\frac{4}{3}, n = \frac{43}{3}$; 37 ১৩. $P = 2, D = S = 5$

১৪. $P_A = 2, P_B = 3, D_A = S_A = 2, D_B = S_B = 1$ ১৫. 23.17

অনুশীলনী - ৫

৪. ক) $\frac{1}{9}$ খ) 0 গ) $\frac{8}{6}$ ৭. $100q + \frac{55}{2}q^2 - q^3$

৮. $p = 20$

$q = 10$

অনুশীলনী - ৬

৮. ক) সর্বনিম্ন 4.9375 খ) সর্বোচ্চ 426.04 গ) সর্বোচ্চ 8 ঘ) সর্বনিম্ন — 91884 ঙ) সর্বনিম্ন — 14

৯. 3 ১২. $\frac{15}{28}$ ১৩. $\frac{-2}{\sqrt{15}}$ ১৪. ক) 10 খ) 15 গ) 15

১৫. ক) 10.5 খ) 7.6 গ) 7 ১৬. $Q = (20F + 4F_2 - \frac{F^3}{3})$ অপেক্ষকের Q-এর সর্বোচ্চ মানের জন্য F-এর মান নির্ণয় কর খ) $MQ = \frac{dQ}{dF}$ -এর জন্য MQ-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

গ) $AQ = \frac{Q}{F}$-এর জন্য AQ-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে $AQ = MQ$

১৭. ক) সর্বোচ্চ মুনাফার জন্য $x = 2$, $P = 18$ এবং মুনাফা $R = 24$ খ) $x = \frac{23}{12}$, $P = 18.5$ গ) 20.625 ১৮. মুনাফা $= (22 - x)x - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 54)$ ১৯. মুনাফা $= 12x - 6x^2$ ২০. ক) 16.6 খ) $\frac{25}{6} + \frac{5\sqrt{13}}{6}$ ২১. কর আরোপের আগে $q = 2500$, $P = 75$ এবং মুনাফা = 32500 ; কর আরোপের পর $q = 2000$, $p = 80$, মুনাফা = 10000 ২২. $(10\sqrt{2} + 4) \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 2\right)$

অনুশীলনী – ৭

৯. $R = \frac{x(3x + 10)}{x + 2}$; $P = \frac{3x + 10}{x + 2}$ ১০. ক) $C(x) = -2000 + 110x - x^2$ খ) 40,50 গ) 18000 ১১. 114 ১২. $16\frac{2}{3}$ ১৩. 960 ১৪. ক) $x^3 - 18x^2 + 1000x + 1200$ খ) $-x^3 + 18x^2 + 2000x - 1200$ গ) 33 ১৫. $P = \frac{a}{x + b} - c$ ১৬. 5 বছর, 100000 টাকা ১৭. $c = \frac{4}{5}Y + 12$; $S = \frac{1}{5}Y - 12$ ১৮. 14750

অনুশীলনী – ৮

৭. 1381.41, 6250. 1400.42 ৮. 1392.81 ৯. 8028.80 ১০. 96328 ১১. $20\frac{1}{5}$ ১২. 3939.50 ১৩ $22\frac{1}{5}$ ১৪. 20000 ১৫. 2350.72 ১৬. 18222.20, 30928.89 ১৭. 1014.95, 1029.63 ১৮. $12\frac{3}{4}$ ১৯. 12.3 ২০. 54653.15

অনুশীলনী – ৯

১১. ক) 5 খ) 4 ১২. 3600 ১৩. 2880 ১৪. 2520 ১৫. 600 ১৬. 5040. 21 ১৭. 15 ১৮. ক) 19000 খ) 6040 গ) 43200 ঘ) 4320 ঙ) 151200 ১৯. ক) 6720

খ) 3326400 ২০. 120 ২১. 418400 ২২. 262144 ২৩. 4324320 ২৪. 6 ২৫. 22 ২৬. 14 ২৭. 496 ২৮. 215 ২৯. 192 ৩০. 6 ৩১. 245000 ৩২. $10 \times {}^{25}c_9$, $4 \times {}^{25}c_9$, $6 \times {}^{25}c_9$, $10 \times {}^{22}c_9$, ৩৩. ক) 28 খ) 21 গ) 7 ঘ) 12 ঙ) 15 চ) 32 ছ) 15

অনুশীলনী – ১০

১. $16x^4 - \frac{32}{3}x^3y + \frac{8}{3}x^2y^2 - \frac{8}{27}xy^3 + \frac{1}{81}y^4$ ২. $2y(16y^4 + 20y^2 + 1$ ৩. $1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8$ ৪. ক) ${}^{27}c_8 x^{49} (4y)^8$ খ) $308x$ ৫. $1 + 17x + 28x^2 + 77x^3 + \dots\dots$; 1.1518 ৬. ${}^{19}c_3 . 5^{16}$ ৭. ± 3 ৯. ক) $\frac{945}{2}x^7$, $\frac{2835}{4}x^7$ খ) $\frac{6}{25}x^2y^2$ ১০. 3 ১১. পঞ্চম, 1120 ১২. p^{-7} সহ কোন পদ থাকবে না। ১৩. $\frac{9}{7}$ ১৪. n ১৫. $x = 2$, $y = 3$, $n = 5$ ১৬. 7 ১৭. $x = 2$, $n = 5$ ১৮. 3.03658 ১৯. 18 ২০. 9.9702

অনুশীলনী – ১১

৭. ক) 11, $\frac{1}{3}(4n + 5)$ খ) -1, $(27 - 4n)$ গ) $-\frac{5}{7}$, $\frac{1}{7}(3n - 16)$ ৮. 90, $n(25 - 2n)$ ৯. দশম ১০. 13 ১২. $14 + 13 + 12 \dots$ ১৩. 26 ১৪. 0, -15 ১৫. 70336 ১৬. ক) 10, 11, 12 খ) 3, 6, 9 ১৭. 6, 9, 12, 15 ১৮. 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, ১৯. সম্ভব, 68% ২০. 117 ২১. 1650, 12 ২২. 15 বছর ২৩. 400, 10600 ২৬. $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ ২৭. ক) 10235 খ) 4.5 গ) $\frac{10}{9}(10^n - 1) + 2(2^n - 1)$ ঘ) $\frac{5}{9}\left[\frac{10}{9}\left(10^n - 1\right) - n\right]$ ঙ) $1\frac{1}{24}$ চ) $121(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ ২৮. 10, 13, 16 ২৯. 4, 6, 9 ৩০. -16 ৩১. $\frac{314}{495}$ ৩২. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$; $\frac{1}{512}$ ৩৩. $1\frac{1}{3} + 2 + 3 + 4\frac{1}{4} \dots$ ৩৪. 2, 3, $4\frac{1}{4}$ ৩৫. $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3 ৩৬. 4, 6, 9 ৩৭. 56275, 47130 ৩৮. 534346 ৩৯. 20% ৪০. 876700

অনুশীলনী – ১২

৭. $\frac{8}{15}$, $\frac{2}{15}$ ৮. $\frac{9}{20}$ ৯. $\frac{1}{285}$ ১০. .388 ১১. $\frac{8}{37}$, $\frac{1}{1554}$ ১২. .45 ১৩. .55 ১৪. ক) $\frac{8}{55}$ খ) $\frac{19}{33}$ ১৫. ক) $\frac{3}{38}$ খ) $\frac{99}{190}$ গ) $\frac{91}{190}$ ১৬. .96 ১৭. .15 ১৮. 800 ১৯. 5948 ২০. 32

অনুশীলনী – ১৩

১০. ক) একক ম্যাট্রিক্স খ) নিচের অংশে ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্স গ) সারি ম্যাট্রিক্স ঘ) স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স ঙ) আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্স চ) 3×4 ম্যাট্রিক্স ছ) শূন্য ম্যাট্রিক্স জ) স্কেলার ম্যাট্রিক্স ঝ) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স ঞ) বিচ্যুত প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

১১. ক) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 6 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & -10 \end{vmatrix}$ খ) $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 4 \\ 12 & 0 & 16 \\ 8 & 12 & 24 \end{vmatrix}$ গ) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 18 & -4 & 42 \\ 34 & 4 & 60 \end{vmatrix}$

ঘ) $\begin{vmatrix} 28 & 12 & 2 \\ 12 & -2 & 16 \\ 10 & 4 & 10 \end{vmatrix}$ ঙ) $\begin{vmatrix} 22 & 8 & 8 \\ 18 & 2 & 24 \\ 10 & 16 & 30 \end{vmatrix}$

১২. ক) $\begin{vmatrix} \frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{vmatrix}$ খ) $\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$ ১৫. 730

১৬. A = 1600, B = 3800

১৮. $Q = \begin{vmatrix} 33 & 9 \\ -110 & -30 \end{vmatrix}$ ১৯. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ $\frac{1}{14}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

২০. ক) কোন সাধারণ সমাধান নেই, কেন না নির্ণায়ক = 0

ক) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1$

২১. $x_1 = -\frac{17}{10}, x_2 = \frac{13}{5}$ ২২. 190, 210 ২৩. ক) ময়দা = 530 পাউন্ড, ক্রিম = 250, চিনি = 120 পাউন্ড খ) A = 400, B = 200, C = 100

অনুশীলনী – ১৪

১. ক) $\sqrt{a^2 + b^2}$ খ) $11\sqrt{2}$ গ) $\frac{2}{3}\sqrt{65}$ ২. $x = -1$ ৪. 41 বর্গ একক ৫. (5, −7) ৬. $3\frac{1}{2}$ ৭. 19000 ৮. ক) 1000 খ) 8200 ৯. 1800, 2800

অনুশীলনী – ১৫

৪. X = 12, Y = 60 ; 624 ৫. $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 35$ ৬. চেয়ার = 3, টেবিল = 9 ; 330 ৭. X = 4 দিন, Y = 12 দিন ৮. 2.05 টাকা

পরিভাষা
বাংলা–ইংরেজি

অঋণাত্মকতা	non-negativity
অনির্দিষ্ট সমাকলিত মান	indefinite integral
অনুকূল ঘটনা	favourable event
অনুপাত	ratio
অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা	conjugate complex number
অনুরাশি	minor
অন্তরক	derivative
অন্তরীকরণ	differentiation
অপসারণ পদ্ধতি	elimination method
অপেক্ষক	function
অবচিতি	depreciation
অবতল	concave
অব্যক্ত অপেক্ষক	implicit function
অভিজ্ঞতা রেখা	learning curve
অভীষ্ট অপেক্ষক	objective function
অভেদ	identity
অমূলদ সংখ্যা	irrational number
অসমতা	inequality
অসম্ভব ঘটনা	impossible event
অসীম ধারা	infinite series
অসীম সমাহার	infinite set
অসংলগ্ন সমাহার	disjoint set
অংক	digit
অংশক	mantissa
অ্যানুইটি	annuity
আড়াআড়ি উপাদান	diagonal element
আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্স	diagonal matrix
আবশ্যক শর্ত	necessary condition
আয়	revenee, income
আয়তন	volume
আংশিক অন্তরীকরণ	partial differentiation
উত্তল	convex
উৎপাদন অপেক্ষক	production function
উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত	producer's surplus
উৎপাদন ব্যয়	production cost
উপপাদ্য	theorem
উপসমাহার	subset
উপাদান	element
ঋণাত্মক	negative
একক	unit
একক ম্যাট্রিক্স	unit matrix
একক সমাহার	unit set, singleton
একধারা অপেক্ষক	monotone function
একধারা বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক	monotonically increasing function
একধারা ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক	monotonically decreasing function
একমান অপেক্ষক	one valued function
এলাকা	area
করণী	surd
কার্তেসীয় পূরণ	cartesian product
কাঙ্ক্ষিত মান	expected value
কাল্পনিক সংখ্যা	imaginary number
কিস্তি	instalment
কোটি	ordinate
কোণ	angle
ক্রম	sequence
ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক	decreasing function
ক্ষেত্রফল	area
গড়	average
গণনামিতি	calculus
গণনার নিয়ম	countig rule
গতি	velocity
গাণিতিক গড়	arithmatic mean
গাণিতিক সম্ভাবনা	mathematical probability
গৌণিক	factorial
ঘটনা	event
ঘন করণী	cubic surd

ঘাত	degree. power
চক্রবৃদ্ধি সুদ	compound interest
চতুর্ঘাত সমীকরণ	biquadratic equation
চতুর্ভাগ	quadrant
চলক	variable
চাহিদা	demand
চাহিদা অপেক্ষক	demand function
চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা	demand elasticity
চিহ্ন	sign
ছেদ	intercept
ছেদন	interection
জটিল সংখ্যা	complex number
জোড় সংখ্যা	even number
জ্যামিতিক গড়	geometric mean
ঢাল	slope
তত্ত্ব	theory
তালিকা	table
তালিকা পদ্ধতি	tabular method
তুরীয় অপেক্ষক	transcendental function
তুলনামূলক বিন্যাস	order relations
ত্রিকোণমিতি	trigonometry
ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক	trigonometric function
ত্রিঘাত সমীকরণ	cubic equation
দ্বিঘাত সমীকরণ	quadratic equation
দ্বিপদী উপপাদ্য	binomial theorem
দ্বিপদী বিবৃতি	binomial expression
দ্বিপদী সহগ	binomial coefficient
দ্বিবর্গকরণী	biquadratic surd
দ্বিমান অপেক্ষক	two valued function
দৈবক্রমিক পরীক্ষা	random experiment
ধনাত্মক	positive
ধারণা	concept
ধারা	series
ধ্রুপদী সম্ভাবনা	classical probability
ধ্রুব	constant
নমুনা পরিসর	sample space
নমুনা বিন্দু	sample point
নির্দিষ্ট সমাকলিত মান	definite integral
নির্ণায়ক	determinant
নিরবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক	continuous function
নিরীক্ষণগত সম্ভাবনা	emperical probability
নির্ভরশীল ঘটনা	dependent event
নির্ভরশীল চলক	dependent variable
নিশ্চিত ঘটনা	certain event
পক্ষপাতদুষ্ট	biassed
পরস্পর নাকচকারী ঘটনা	mutually exclesive events
পরস্পর স্বাধীন ঘটনা	independent events
পরিবর্তনশীল ব্যয়	variable expenditure
পরিমাণ	quantity
পরিসংখ্যানগত সম্ভাবনা	statistical probability
পর্যাপ্ত শর্ত	sufficient condition
পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ	successive differentiation
পূরণ	multiplication
পূর্ণসংখ্যা	integers. whole number
পূর্ণক	characteristics
প্রগমণ	progression
প্রভেদ	difference
প্রতিকূল ঘটনা	unfavourable event
প্রতিসম ম্যাট্রিক্স	symmetric matrix
প্রান্তিক	marginal
প্রান্তিক আয়	marginal revenue
প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয়	marginal cost
বন্ধনী	bracket
বর্গ	square
বর্গ করণী	quadratic surd
বর্গমূল	square root
বর্গ ম্যাট্রিক্স	square matrix
বর্তমান মূল্য	present value
বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক	increasing function
বস্তু	object
বহুপদী	polynominal
বহুমান অপেক্ষক	multiple valued function
বাস্তব সংখ্যা	real number
বিক্রির হার	rate of sales

বিচ্যুত প্রতিসম ম্যাট্রিক্স	skew symmetric matrix
বিজোড় সংখ্যা	odd number
বিনিয়োগ অপেক্ষক	investment function
বিন্যাস	permutation
বিপরীত ম্যাট্রিক্স	inverse matrix
বিপরীত সংবর্গমান	antilogarithm
বিপরীত সংবর্গমান সারণী	antilogarithm table
বিবৃতি	expression
বিভাজন	division
বিভাজ্য	divisible
বিভেদক সহগ	derivative
বিমূর্ত মান	modulus
বিস্তৃতি	expansion
বিয়োজন	subtraction
ব্যক্ত অপেক্ষক	explicit function
বৃত্তাকার বিন্যাস	circular permutation
ভারসাম্য	equilibrium
ভারসাম্য মুল্য	equilibrium price
ভারসাম্য পরিমাণ	equilibrium quantity
ভুজ	abscissa
ভোক্তার উদ্বৃত্ত	consumer's surplus
ভোগ অপেক্ষক	consumption function
ভোগ প্রবণতা	propensity to consume
মধ্যক প্রভেদ	mean difference
মন্দন	retardation
মিশ্র করণী	mixed surd
মুনাফা	profit
মূলদকরণ	rationalization
মূলদকারী গুণক	rationalizing factor
মূলদ ভগ্নাংশ	rational fraction
মূলদ সংখ্যা	rational number
মূল বিন্দু	origin
মূল্য	price
মোট আয়	total revenue
মৌল ঘটনা	elementary event
মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা	prime
ম্যাট্রিক্স	matrix

ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ	transpose of a matrix
যথার্থ উপসমাহার	proper subset
যুগপৎ সমীকরণ	simultaneous equation
যোগফল	sum
যোগান অপেক্ষক	supply function
যোজন	addition
যৌগিক অপেক্ষক	composite function
যৌগিক ঘটনা	compound event
রৈখিক	linear
রৈখিক প্রকল্পন	linear programming
লব	numerator
লম্ব	perpendicular
লেখচিত্র	graphic
লেখচিত্র পদ্ধতি	graphic method
লেখচৈত্রিক সমাধান	graphic solution
শূন্য ম্যাট্রিক্স	zero matrix
শূন্য সমাহার	empty, null or void set
শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি	ordered pair
সঞ্চয় অপেক্ষক	savings function
সঞ্চয় প্রবণতা	propensity to save
সবচেয়ে সুবিধাজনক	optimum
স্বতঃসিদ্ধ সম্ভাবনা	axiomatic probability
সমগ্র করণী	entire surd
সমজাতীয় করণী	similar surd
সমচ্ছেদ বিন্দু	break-even point
সমতা	equality
সমতুল্য সমাহার	equivalent set
সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা	equally likely event
সমাকলন	integration
সমাকলনের ধ্রুব	constant of integration
সমাকলনীয় রাশি	integrand
সমাকলিত মান	integral
সমান সমাহার	equal set
সমানুপাতিক ধারা	geometric series
সমানুপাতিক প্রগমণ	geometric progression
সমান্তর ধারা	arithmatic series
সমান্তর প্রগমণ	arithmatic progression

সমাবেশ	combination
সমাহার	set
সমাহারের ছেদন	intersection of sets
সমাহারের যোজন	union of sets
সমীকরণ	equation
সমীকরণের ঘাত	degree of an equation
সম্পূরক সমাহার	complement of a set
সম্ভাবনা	probability
সম্ভাব্য ঘটনা	probable event
সম্ভাব্য সমাধান	feasible solution
সরবরাহ	suply
সরল রেখা	straight line
সরলরৈখিক	linear
সর্বজনীন সমাহার	universal set
সর্বনিম্ন মান	minimum value, minima
সর্বমোট ঘটনা	exhaustive events
সর্বোচ্চ মান	maximum value, maxima
সসীম	finite
সহগ	coefficient
সহগুণক	cofactor
সাধারণ অনুপাত	common ratio
সাধারণ অন্তর	common difference
সাধারণ সংবর্গমান	common logarithm
সামগ্রিক অন্তরীকরণ	total diffentiation
সারণী	table
সারি	row
সারি ম্যাট্রিক্স	row matrix
সীমা	limit
সীমাবদ্ধতা	constraints
সীমাবদ্ধ বিন্যাস	restricted permutation
সীমাবদ্ধ সমাবেশ	restricted combination
সুদ	interest
সুদের হার	rate of interest
সূচক	index
সূচক তত্ত্ব	theory of indices
সূত্র	formula
স্তম্ভ	column
স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স	column matrix
স্থানাংক	co ordinates
স্থিতিস্থাপকতা	elasticity
স্থির উৎপাদন ব্যয়	fixed cost
স্বাধীন চলক	independent variable
স্বাভাবিক সংবর্গমান	natural logarithm
সংখ্যা	number
সংবর্গমান	logarithm
সংবর্গমানের ভিত্তি	base of logarithm
সংবর্গমান সারণী	logarithm table
হর	denominator
হার	rate

ইংরেজি– বাংলা

abscissa	ভুজ
acceleration	ত্বরণ
addition	যোজন
adjoint of a matrix	ম্যাট্রিক্সের সংলগ্নক
angle	কোণ
annuity	অ্যানুইটি
antilogarithm	বিপরীত সংবর্গমান
antilogarithm table	বিপরীত সংবর্গমান সারণী
area	এলাকা, ক্ষেত্রফল
arithmatic mean	গাণিতিক গড়
arithmatic progression	সমান্তর প্রগমণ
arithmatic series	সমান্তর ধারা
average	গড়
axiomatic probability	স্বতঃসিদ্ধ সম্ভাবনা
base of logarithm	সংবর্গমানের ভিত্তি
biassed	পক্ষপাতদুষ্ট
binominal co-efficient	দ্বিপদী সহগ
binomial expansion	দ্বিপদী বিস্তৃতি
binomial expression	দ্বিপদী বিবৃতি
binomial theorem	দ্বিপদী উপপাদ্য
biquadratic equation	চতুর্ঘাত সমীকরণ
biquadratic surd	দ্বিবর্গ করণী
bracket	বন্ধনী
break even point	সমচ্ছেদ বিন্দু
calculus	গণনামিতি

cartesian product	কার্তেসীয় পূরণ
certain event	নিশ্চিত ঘটনা
characteristic	পূর্ণক
circular permutation	বৃত্তাকার বিন্যাস
classical probability	ধ্রুপদী সম্ভাবনা
coefficient	সহগ
cofactor	সহগুণক
column	স্তম্ভ
column matrix	স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স
combination	সমাবেশ
common difference	সাধারণ অন্তর
common logarithm	সাধারণ সংবর্গমান
common ratio	সাধারণ অনুপাত
complement of a set	সম্পূরক সমাহার
complex number	জটিল সংখ্যা
composite function	যৌগিক অপেক্ষক
compound event	যৌগিক ঘটনা
compound interest	চক্রবৃদ্ধি সুদ
concave	অবতল
concept	ধারণা
conjugate complex number	অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা
constant	ধ্রুব
consumers surplus	ভোক্তার উদ্বৃত্ত
consumption function	ভোগ অপেক্ষক
convex	উত্তল
coordinates	স্থানাংক
cost of production	উৎপাদন ব্যয়
counting rule	গণনার নিয়ম
cubic equation	ত্রিঘাত সমীকরণ
cubic surd	ঘন করণী
decreasing function	ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক
definite integral	নির্দিষ্ট সমাকলিত মান
degree of an equation	সমীকরণের ঘাত
demand	চাহিদা
demand function	চাহিদা অপেক্ষক
dependent event	নির্ভরশীল ঘটনা
dependent variable	নির্ভরশীল চলক
depreciation	অবচিতি
derivative	অন্তরক, বিভেদক সহগ
determinant	নির্ণায়ক
diagonal element	আড়াআড়ি উপাদান
diagonal matrix	আড়াআড়ি ম্যাট্রিক্স
digit	অংক
difference	প্রভেদ
differentiation	অন্তরীকরণ
disjont sets	অসংলগ্ন সমাহার
divisible	বিভাজ্য
division	বিভাজন
elasticity	স্থিতি স্থাপকতা
element	উপাদান
elementary event	মৌল ঘটনা
elimination method	অপসারণ পদ্ধতি
emperical probability	নিরীক্ষাগত সম্ভাবনা
empty set	শূন্য সমাহার
entire surd	সমগ্র সমাহার
equal set	সমান সমাহার
equality	সমতা
equally likely event	সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা
equation	সমীকরণ
equilibrium	ভারসাম্য
equivalent set	সমতুল্য সমাহার
even function	সমরূপ অপেক্ষক
even number	জোড় সংখ্যা
event	ঘটনা
exhausitve events	সর্বমোট ঘটনা
explicit function	ব্যক্ত অপেক্ষক
expression	বিবৃতি
factorial	গৌণিক
favourable event	অনুকূল ঘটনা
feasible solution	সম্ভাব্য সমাধান
finite series	সসীম ধারা
finite set	সসীম সমাহার
fixed cost	স্থির উৎপাদন ব্যয়
fixed expenditure	স্থির ব্যয়
formula	সূত্র
fucntion	অপেক্ষক

geometric mean জ্যামিতিক গড়
geometric progression সমানুপাতিক প্রগমণ
geometric series সমানুপাতিক ধারা
graph লেখচিত্র
graphic method লেখচিত্র সমাধান
identity অভেদ
identity matrix একক ম্যাট্রিক্স
imaginary number কাল্পনিক সংখ্যা
implicit function অব্যক্ত অপেক্ষক
indefinite intergral অনির্দিষ্ট সমাকলিত মান
independent events পরস্পর স্বাধীন ঘটনা
independent variable স্বাধীন চলক
index সূচক
inequality অসমতা
infinite series অসীম ধারা
infinite set অসীম সমাহার
instalment কিস্তি
integers পূর্ণ সংখ্যা
integral সমাকলিত মান
integrand সমাকলনীয় রাশি
integration সমাকলন
intercept ছেদ
interest সুদ
intersection of sets সমাহারের ছেদন
inverse matrix বিপরীত ম্যাট্রিক্স
investment বিনিয়োগ
investment function বিনিয়োগ অপেক্ষক
irrational number অমূলদ সংখ্যা
learning curve অভিজ্ঞতা রেখা
limit সীমা
line রেখা
linear রৈখিক
linear programming রৈখিক প্রকল্পন
logarithm সংবর্গমান
logarithm table সংবর্গমান সারণী
mantissa অংশক
marginal প্রান্তিক
marginal cost প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয়
marginal revenue প্রান্তিক আয়
mathematical probability গাণিতিক সম্ভাবনা
matrix ম্যাট্রিক্স
maxima সর্বোচ্চ মান
mean মধ্যক
mean difference মধ্যক প্রভেদ
minima সর্বনিম্ন মান
minor অনুরাশি
mixed surd মিশ্র করণী
modulus বিমূর্ত মান
montone function একধারা অপেক্ষক
monotonically decreasing fucntion একধারা ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক
multiple valued function বহুমান অপেক্ষক
multiplication পূরণ
mutually exclusive events পরস্পর নাকচকারী ঘটনা
natural logarithm স্বাভাবিক সংবর্গমান
natural number স্বাভাবিক সংখ্যা
necessary condition আবশ্যক শর্ত
negative ঋণাত্মক
non-negativity অঋণাত্মকতা
null set শূন্য সমাহার
number সংখ্যা
numerator লব
object বস্তু
objective function অভীষ্ট অপেক্ষক
odd function বিরূপ অপেক্ষক
odd mumber বিজোড় সংখ্যা
one valued function একমান অপেক্ষক
order শৃঙ্খলা
optimum সবচেয়ে সুবিধাজনক
order relations তুলনামূলক বিন্যাস
ordered pair শৃঙ্খলাবদ্ধ জুটি
ordinate কোটি
origin মূলবিন্দু
permutation বিন্যাস

perpendiculer	লম্ব
polynomial	বহুপদী
positive	ধনাত্মক
power	ঘাত
present value	বর্তমান মূল্য
price	মূল্য
probable event	সম্ভাব্য ঘটনা
probability	সম্ভাবনা
prducers surplus	উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত
production function	উৎপাদন অপেক্ষক
profit	মুনাফা
progression	প্রগমণ
proper subset	যথার্থ উপসমাহার
propersity to consume	ভোগ প্রবণতা
propensity to save	সঞ্চয় প্রবণতা
quadrant	চতুর্ভাগ
quadratic equation	দ্বিঘাত সমীকরণ
quardratic surd	বর্গকরণী
quantity	পরিমাণ
random experiment	দৈবক্রমিক পরীক্ষা
rate	হার
rate of interest	সুদের হার
rate of sale	বিক্রির হার
ratio	অনুপাত
rational fraction	মূলদ ভগ্নাংশ
rationalization	মূলদকরণ
rationlizing factor	মূলদকারী গুণক
real number	বাস্তব সংখ্যা
restricted combination	সীমাবদ্ধ সমাবেশ
restricted permutation	সীমাবদ্ধ বিন্যাস
retardation	মন্দন
revenue	আয়
row	সারি
row matrix	সারি ম্যাট্রিক্স
sample point	নমুনা বিন্দু
sample space	নমুনা পরিসর
savings function	সঞ্চয় অপেক্ষক
scalar matrix	স্কেলার ম্যাট্রিক্স
selector method	বাছাই পদ্ধতি
series	ধারা
set	সমাহার
sequence	ক্রম
sign	চিহ্ন
simultaneous equations	যুগপৎ সমীকরণ
similar surd	সমজাতীয় করণী
singleton	এক উপাদানের সমাহার
skew symmetric matrix	বিচ্যুত প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
slope	ঢাল
statistical probability	পরিসংখ্যানগত সম্ভাবনা
square matrix	বর্গ ম্যাট্রিক্স
square root	বর্গমূল
straight line	সরলরেখা
subset	উপসমাহার
subtraction	বিয়োজন
successive differentiation	পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ
sufficient condition	পর্যাপ্ত শর্ত
sum	যোগফল
supply function	যোগান অপেক্ষক
surd	করণী
symmetric matrix	প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
table	সারণী, তালিকা
tabular method	তালিকা পদ্ধতি
theorem	উপপাদ্য
theory	তত্ত্ব
theory of indices	সূচক তত্ত্ব
total differentiation	সামগ্রিক অন্তরীকরণ
transcendental function	তুরীয় অপেক্ষক
transpose of a matrix	ম্যাট্রিক্সের ক্রমান্তরিত রূপ
triangle	ত্রিভুজ
triangular matrix	ত্রিকোণ ম্যাট্রিক্স
trigonometry	ত্রিকোণমিতি
trigonometric function	ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক

two valued function	দ্বিমান অপেক্ষক
unfavourable event	প্রতিকূল ঘটনা
union of sets	সমাহারের যোজন
unit matrix	একক ম্যাট্রিক্স
unit set	একক সমাহার
universal set	সর্বজনীন সমাহার
variable	চলক
variable cost	পরিবর্তনশীল উৎপাদনশীল ব্যয়
velocity	গতি
void set	শূন্য সমাহার
whole number	পূর্ণ সংখ্যা
zero matrix	শূন্য ম্যাট্রিক্স